februari 2001 ~ nr 5 ~ jaargang 76

Wat is een cirkel?

EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar



orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



5

FEBRUARI 2001 JAARGANG 76

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24, 3731 GH De Bilt
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl



Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per ver. jaar: f 80,00
Studentleden: f 40,00
Leden van de VVWL: f 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: f 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: f 85,00 per jaar.
Voor instituten en scholen: f 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor f 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

INHOUD

Door omstandigheden ontbreekt ook in dit nummer de rubriek Recreatie.

[Van de redactietafel]

Voor u ligt weer een gevarieerd nummer met hopelijk voor elk wat wils. Scholen koersen alweer langzamerhand aan op het einde van het schooljaar. Vele scholen voor vmbo zijn op dit moment bezig PTA's op te stellen voor hun derde en vierde klas. Leerlingen zullen in de tweede klas al een (soms nog voorlopige) keuze moeten maken voor één van de sectoren van het vmbo. Een flink aantal scholen met een vwo-afdeling is op weg naar de eerste examens over het Tweede fase programma. Als die geweest zijn, kan mogelijk een eerste balans opgemaakt worden over opbrengsten en resultaten van de Tweede fase. We houden u op de hoogte.

Regionale bijeenkomsten

In dit nummer treft u ook de uitnodiging aan voor de regionale bijeenkomsten van de NVvW in Zwolle, Eindhoven en Leiden. Er is weer een uitgebreid en gevarieerd programma samengesteld door de verenigingscommissie voor deze bijeenkomsten. Er zijn veel werkgroepen rond het vmbo, er zijn werkgroepen rond de Tweede fase havo/vwo en er zijn nog een aantal meer algemene werkgroepen.
Alle begrippen die op dit moment in het onderwijs rondwaren, zien we terug in de titels: probleemgestuurd, PTA, sectorwerkstuk, examentraditie, computergebruik, determinatie, examendossier, toetsen, praktische opdrachten, Internet. Vanaf pagina 201 vindt u het programma.
Op de website van de Vereniging (*http://www.nvvw.nl*) treft u natuurlijk ook steeds de meest actuele inhouden en programma's van de bijeenkomsten aan.

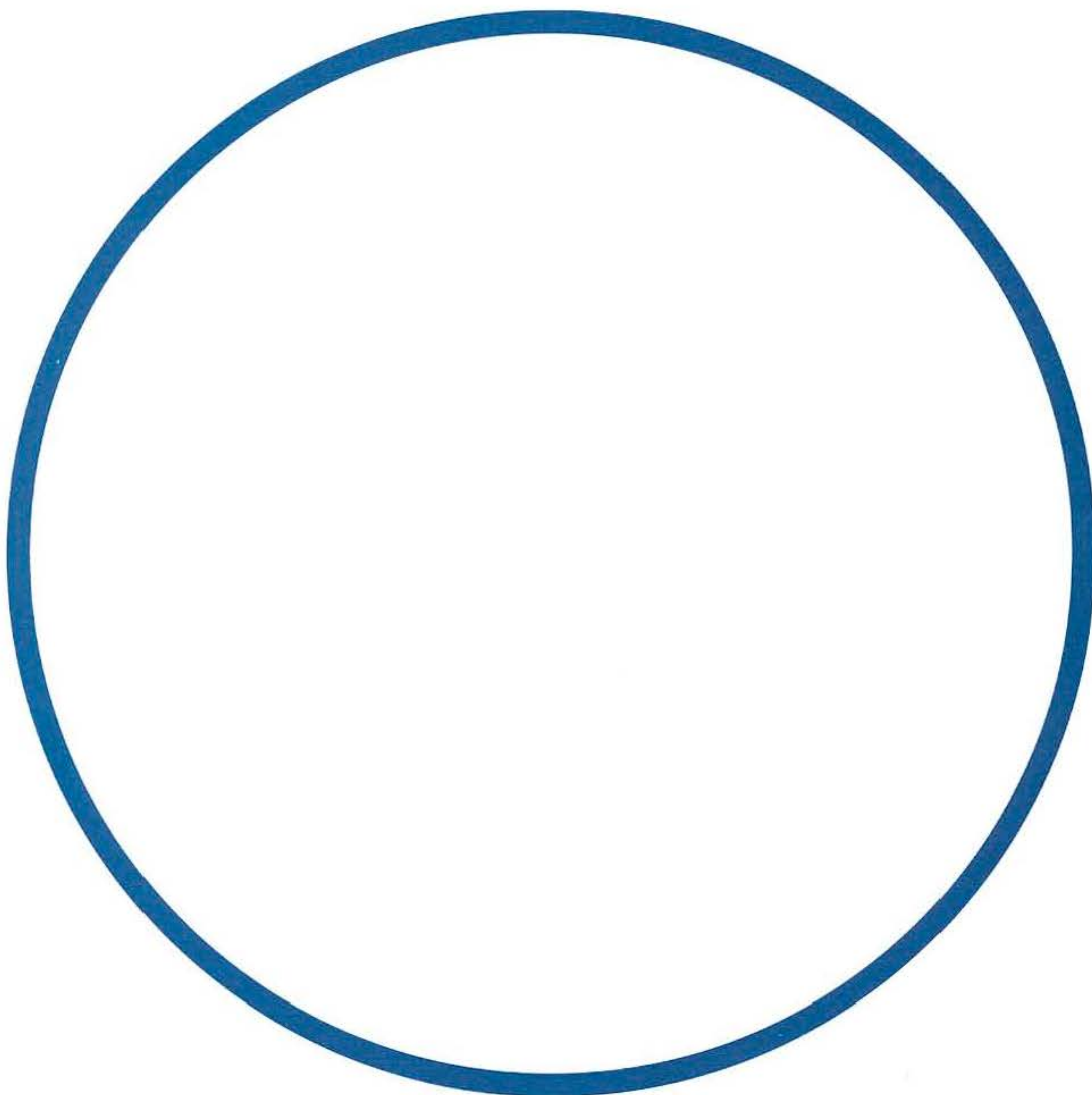
Computeralgebra

Voor de Tweede Fase van havo en vwo zal de komende jaren een beslissing genomen moeten worden of het gebruik maken van computeralgebra toegestaan zal worden in wiskunde. Er zijn al allerlei rekenmachines, als opvolger van de grafische rekenmachines, waarin mogelijkheden op het gebied van computeralgebra zijn ingebouwd.
Het mogen gebruiken van zo'n machine heeft natuurlijk niet alleen implicaties voor de programma's van de bovenbouw, maar ook voor het algebraonderwijs in de onderbouw. Daarnaast zien we een ontwikkeling naar allerlei pakketten die het best zijn te omschrijven als digitale leeromgevingen, waarin de mogelijkheid voor computeralgebra één van de vele functionaliteiten is.
In dit nummer vindt u een praktisch verslag van een experiment met zo'n pakket: Studyworks. Opvallend is dat niet alleen docenten in de Tweede fase van havo en vwo geïntrigeerd zijn door de mogelijkheden die dit geeft in de wiskundeles; er zijn ook docenten van mavo- en vbo-scholen die met hun leerlingen met dit pakket aan de slag zijn of binnenkort gaan. We hopen u regelmatig verslag te blijven doen van de klassenervaringen op dit gebied.

Hoofdredacteur

Na vijf jaar het hoofdredacteurschap van dit mooie vakblad bekleed te hebben, heb ik besloten het stokje aan een andere collega over te dragen.
Dus als u redactionele ambities heeft en een uitdaging zoekt in het hart van (de ontwikkelingen in) het wiskundeonderwijs, kijkt u dan vooral naar de oproep op de een na laatste bladzijde van dit nummer.
Daarnaast kan de redactie altijd mensen gebruiken, die op een of andere manier willen bijdragen aan de totstandkoming van dit orgaan van de Vereniging.
Als u ideeën heeft, dan kunt u zich melden bij voorzitter van de redactie: Gert de Kleuver.

Kees Hoogland



De ideeën in dit artikel [1] zijn niet nieuw in Nederland. Toch wilden de schrijvers hun ervaringen overdragen die ze gehad hebben bij het ontwerpen van leerteksten. Zij geloven dat de inhoud van het artikel algemene waarden heeft, waarbij de tekst over het leren van de cirkel eerder als voorbeeld dient, dan als afzonderlijk wapenfeit.

Wat is een cirkel?

[Joop van Dormolen en Abraham Arcavi, Weizmann Institute for Science, Rehovot, Israël]

Als jong leraar probeerde een van de auteurs zijn leerlingen te leren wat een cirkel is door ze de definitie te geven: 'Een cirkel is een figuur waarvan de punten een vaste afstand hebben tot een gegeven punt.' Zijn leerlingen luisterden geduldig. Sommigen zetten hun ik-begrijp-wat-je-zegt-gezicht, zoals van hen verwacht werd. Hadden zij echt begrepen waar het over ging? Als hen later gevraagd werd wat een cirkel is, waren de meeste leerlingen niet in staat de definitie op bevredigende manier te reproduceren en degenen die het wel konden schenen de definitie zonder begrip uit hun hoofd te reproduceren. Wat was er fout gegaan? Hoe kan het dat een korte, heldere en ondubbelzinnige beschrijving blijkbaar onvoldoende was voor het bevatten van het begrip. En dat terwijl vrijwel iedereen een cirkel kon tekenen en herkennen.

De zaak was dat de leraar (nog) niet door had dat niet de cirkel gedefinieerd moest worden, maar dat de leerlingen iets moesten leren. Definities zijn vrijwel nooit startpunt voor het leren van een nieuw begrip. Veeleer het eindpunt ervan. Het is een samenvatting van leerervaringen waarin een nieuw begrip is ontwikkeld, onderzocht en toegepast in verschillende contexten. Op zeker moment is het nodig een definitie vast te leggen, opdat een theorie ontwikkeld kan worden, nieuwe eigenschappen kunnen worden gezocht, gevonden en bewezen. Maar voor dat alles moet men vertrouwd zijn met het begrip. Dit alles is tegenwoordig - in de tijd van realistische wiskunde - niets nieuws, maar de vraag is wat de consequenties zijn voor de ontwikkeling van leerstof.

Een serie opdrachten

Hieronder volgt een mogelijke benadering van een serie leeropdrachten.

Leerlingen krijgen een reeks vragen en opdrachten:

1. *In figuur 5 zie je een aantal figuren. Welk ervan is een cirkel?*

2. *Wat zijn de jongens op dit plaatje (zie figuur 2) aan het doen? Waarom zouden ze het op deze manier doen?*

3. *Kijk naar de deur van de kamer waar je nu bent (zie figuur 3). Als het geen schuifdeur is, doe hem dan een paar keer open en dicht. Let daarbij op de beweging van een hoek aan de buitenkant. Wat voor figuur maakt die hoek, als de deur open of dicht gaat?*

4. *De pony in figuur 4 graast. Het lijkt of hij een cirkel eet. Hoe komt dat?*

5. *Stel je een klein meisje op een schommel voor (zie figuur 5). Denk aan de figuur die haar neus beschrijft bij het schommelen. Wat voor een figuur is dat?*

6. *Neem een touwtje van ongeveer 20 cm. Maak een kant aan een potlood vast (zie figuur 6). Zet je vinger op het andere eind en teken een cirkel.*
Als je een elastiekje in plaats van een touwtje zou gebruiken, zou er dan ook een cirkel komen? Waarom?

7. *Teken een cirkel met je passer (zie figuur 7).*

Nu komt de reflecteervraag:

8. *Wat hebben al deze vragen gemeenschappelijk?*

De leerlingen hebben nu ervaringen van allerlei aard. Daarom kan nu de vraag gesteld worden:

9. *Wat is een cirkel?*

We denken dat de leerlingen nu in staat zijn met begrip te antwoorden, dan wel het antwoord te begrijpen.

Wat is begrijpen?

Voordat we de verschillen becommentariëren tussen de eerste en de tweede benadering, willen we kijken naar wat het betekent om een begrip te 'begrijpen'. Daarvoor moet iemand zich

- het begrip kunnen voorstellen (zeker als het een meetkundig begrip is);
- beseffen wat de essentiële elementen zijn van het begrip;
- beseffen wat de relaties zijn tussen deze basiselementen enerzijds en het voorstellingsbeeld anderzijds;
- in verschillende en nieuwe situaties dezelfde basiselementen kunnen herkennen.

Voor het speciale geval van de cirkel betekent dat, dat iemand

- een cirkel moet kunnen herkennen temidden van andere figuren (opdracht 1);
- zich realiseert dat een cirkel een *middelpunt*, een *straal* en een *omtrek* heeft waarop we punten kunnen aanwijzen, ook al kent hij die woorden nog niet (opdrachten 2 - 7);
- zich realiseert dat elk punt op *eenzelfde afstand* ligt (namelijk de straal) van een *vast punt* (namelijk het middelpunt) (opdracht 8);
- het middelpunt, de straal en punten op de omtrek moet herkennen als abstracties uit de verschillende situaties (opdrachten 8 en 9).

Met dit alles in gedachten willen we nogmaals naar opdracht 8 kijken, maar nu niet om te bedenken wat leerlingen zouden kunnen antwoorden, maar *hoe* zij de vragen 1 tot en met 7 zouden kunnen doorwerken en wat zij van vraag 8 zouden kunnen leren.

Antwoorden kunnen natuurlijk uiteenlopend zijn. We zijn zelf overtuigd van het volgende.

De vragen gaan over dingen waar de leerlingen iets over weten, al zijn zij het zich misschien niet bewust. Het werken aan de opgaven maakt dat bepaalde *ervaringen en kennis* opgerakeld worden, in een nieuw licht komen te staan. Dit veroorzaakt nieuwe ervaringen, die de kennis uitbreiden.

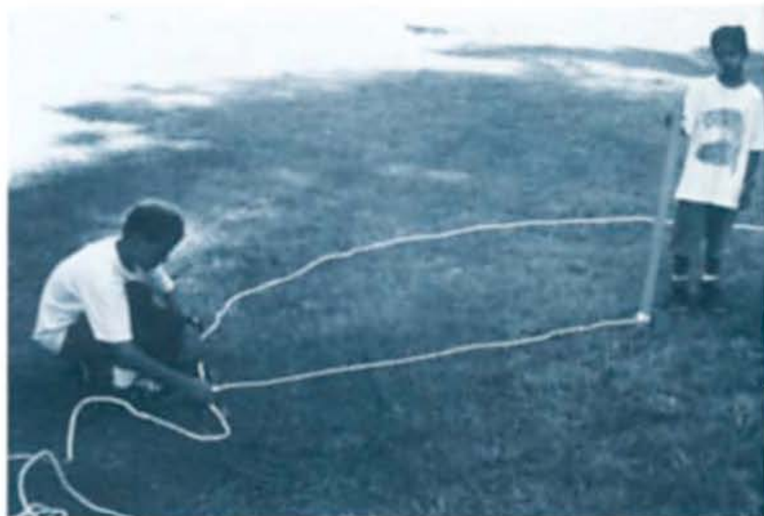
Met uitzondering van de eerste opdracht, hebben alle opdrachten iets te maken met *lichamelijke activiteiten*, ofwel door ze zelf te doen, ofwel door te fantaseren over iemand die ze doet.

De leerlingen wordt niets verteld, maar er worden *vragen gesteld.*
De leerlingen worden aangemoedigd uit de verschillende situaties de essentiële elementen te halen. Met andere woorden, zij *mathematiseren* de gemeenschappelijke elementen en hun relaties.
We zullen nu op elk van deze vier antwoorden commentaar leveren.



Ervaringen en kennis oprakelen

Er is een uitspraak dat je alleen kunt leren wat je al weet. Dat is een paradox, want we weten dat we nu meer weten dan toen we vier jaar oud waren. Toch is er een grond van waarheid in de paradox. We vragen de lezer terug te denken aan een ervaring waar hij luisterde naar een uitleg of een verklarende tekst las, waarin alle woorden tot bekende dagelijkse taal behoorde, de zinnen niet ingewikkeld waren en hij toch geen woord van de uitleg begreep.
Zoiets gebeurt er als iemand zonder voorbereiding de definitie van een cirkel te horen krijgt. Zo iemand wordt in een situatie geplaatst waarbij de nieuwe informatie in verband moeten worden gebracht met de basiselementen van het begrip cirkel en hun onderlinge relaties. We twijfelen er niet aan dat de leerlingen het plaatje van een cirkel temidden van andere plaatjes kunnen herkennen. We geloven dat ze bevredigend kunnen antwoord geven kunnen op de volgende opdrachten, maar geloven ook dat zij zich zonder die opdrachten niet bewust zijn van de basiselementen van het cirkelbegrip en hun onderlinge relaties.
We vragen de lezer ook terug te denken naar een ervaring waarbij een uitleg volstrekt duidelijk was. In zulke gevallen heeft men het gevoel dat men zich het een en ander niet realiseerde, maar eigenlijk allang wist. Het kan ook zijn de informatie echt nieuw was, maar dat het net het kleine beetje informatie was, dat men miste om zich bewust te worden en te begrijpen wat men eigenlijk al wist.



Zone van naaste ontwikkeling

De paradox dat men alleen kan leren wat men al weet, kan opgelost worden met behulp van een begrip dat ontwikkeld is door de Russische psycholoog Vygotskii. Iedereen heeft een gebied van kennis, vaardigheden en houdingen, waarin hij onafhankelijk van anderen antwoorden kan geven en problemen kan oplossen. Dit gebied noemt Vygotskii iemands *zone van feitelijke ontwikkeling* (*zone of actual development*). Volgens Vygotskii hebben mensen ook een ander gebied van kennis, vaardigheden en houdingen, die zij niet zonder hulp van anderen kunnen raadplegen, omdat zij zich er niet bewust van zijn. Dit gebied noemt hij de *zone van naaste ontwikkeling* (*zone of proximal development*). Om de zone van naaste ontwikkeling te benaderen heeft men de hulp nodig van iemand anders, zoals een leraar, een medeleerling, een schoolboekauteur. De mondelinge of schriftelijke hulp maakt dat men zich bewust wordt van de begrippen, deze expliciet kan maken en zodoende de zone van feitelijk ontwikkeling kan vergroten.





1 2 3 4







Dit is een manier om uit de paradox te raken: breng leerlingen in situaties waarin zij hun zone van feitelijke ontwikkeling kunnen uitbreiden met behulp van begrippen waarvan zij zich niet bewust waren (omdat die in de zone van naaste ontwikkeling lagen). Of, als ze zich er wel bewust van waren, maar de relaties tussen de verschillende elementen niet konden leggen. Dit kan gebeuren met behulp van leidende vragen, ervaringen, opdrachten en expliciteringen.
In ons voorbeeld van de cirkel, in de tweede benadering met negen opdrachten en vragen, wordt er rekening mee gehouden, dat leerlingen al een visueel beeld hebben van een cirkel en dat ze dat beeld in relatie kunnen brengen met het woord 'cirkel'. Van hen werd verwacht dat ze een cirkel temidden van andere plaatjes konden herkennen, ook al waren ze zich daar niet van bewust. De eerste vraag brengt ze tot die bewustwording. Leerlingen zullen zich niet realiseren dat (constante) afstand een essentiële rol speelt bij het begrip cirkel. In de volgende opdrachten wordt die rol benadrukt. Deze opdrachten waren verschillend van aard, zoals hieronder zal worden toegelicht. In sommige situaties is de afstand duidelijk aanwezig, in andere moest er een voorstelling van gevormd worden. Op het laatst werd van de leerlingen gevraagd te reflecteren op wat zij hadden gedaan, om zo uit hun ervaringen een mentaal beeld te krijgen van de *afstand* van *punten op de cirkel* tot een *vast punt*. Pas daarna heeft de definitie een grotere kans om voor hen betekenis te krijgen.

Lichamelijke activiteiten

Iedereen weet en gelooft dat men geen vaardigheden kan verwerven door uitleg. Dat is zeker bij motorische vaardigheden, zoals zwemmen, schrijven, breien, lopen, praten. Men moet ze zelf doen en oefenen. Dit is ook het geval met intellectuele vaardigheden, zoals het oplossen van een tweedegraads vergelijking, het bewijzen van de stelling van Pythagoras.
Wij stellen dat, naast het leren van vaardigheden, ook het leren van begrippen, zoals cirkel, parallellogram, functie, sinus, eerstegraads vergelijking, loodrecht, ook bevorderd kan worden met lichamelijke activiteiten. In opdrachten 6 en 7, en wellicht ook in 3, werd gevraagd een cirkel te maken. De belangrijkste reden was niet om hen vaardigheid te geven in het hanteren van een instrument, maar om hen motorische ervaringen te geven om hen te helpen de verschillende elementen van een cirkel te ontdekken, zich voor te stellen en ermee om te gaan.
Toch is er bij het leren van begrippen een duidelijk verschil met het leren van vaardigheden. In plaats van zelf de lichamelijke activiteiten uit te voeren, kan men zich ook voorstellen dat men ze doet, of dat iemand anders ze doet. Het blijkt dat zulke gefantaseerde activiteiten ook kunnen helpen. In ons voorbeeld was dat het geval met opdrachten 2 tot 5. Hier worden de leerlingen in situaties gebracht die ze kunnen herkennen, en door die herkenning, zich te identificeren met de mensen uit de situaties. Zelfs als die mensen alleen in de verbeelding bestaan. Het herkennen van de situaties moet worden opgewekt en ondersteund door reflectie en dat gebeurt in opdracht 8.

Vragen in plaats van uitleggen - leren door doen

In het bovenstaande hebben we een lans gebroken voor het gebruiken van handen, armen of zelfs het hele lichaam bij het leren van begrippen. Doen is echter niet beperkt tot motorische acties. Als we leerlingen over dingen vragen die niet vreemd zijn in hun ervaringswereld, kunnen ze deze - met geschikt gekozen vragen, opdrachten en opmerkingen - zelfstandig onderzoeken of er op reflecteren zonder dat de leraar alles vertelt.
Essentieel hierbij is dat het gewenste resultaat sterk afhankelijk is van twee soorten - of zo men wil, twee niveaus - van vragen en opdrachten. In het eerste niveau worden de leerlingen *uitgenodigd iets te doen* (zoals in de vragen 1 tot en met 7), teneinde gereed te zijn voor het tweede niveau (opdrachten 8 en 9) waarin wordt gevraagd te *reflecteren op eigen ervaringen* gedurende het eerste gedeelte. Het doen geeft de bouwmaterialen voor de reflectie. In de eerste benadering, waarin de definitie kant en klaar meegedeeld werd, bleven de leerlingen verstoken van beide niveaus van actie en werd hen het droge eindproduct gegeven, zonder persoonlijke betrokkenheid en daarom betekenisloos voor velen.

Het ontwerpen van een leertekst

Voor het leren van een nieuw begrip, stellen wij een opeenvolging van leerervaringen voor waarin lichamelijke activiteiten (uitgevoerd of gefantaseerd), toepasselijke vragen en opdrachten en leiding en sturing door de leraar de centrale elementen zijn. Deze elementen weerspiegelen de opvatting dat het leren van een begrip betekent

1. de opbouw en verrijking van een mentaal beeld,
2. het bewust worden van de elementen van het begrip
3. van hun onderlinge relaties,
4. reflectie naar generalisaties en abstracties.

In dit licht willen we nogmaals de verschillende opdrachten de revue laten passeren.
Opdracht 1: Herkenning van de naam en van de vorm temidden van andere vormen. Dit veronderstelt dat het voor herkenning gebaseerd kan zijn op algemene kennis en niet noodzakelijk op expliciete wiskundige definities.
Opdracht 2: Onderkennen van het feit dat het maken van een cirkel betekent dat steeds dezelfde touwlengte genomen moet worden, namelijk de constante afstand tot een gegeven punt.
Opdracht 3: Onderkennen dat het beschrijven van een cirkel niet noodzakelijk inhoudt dat die cirkel ook echt getekend wordt. De breedte van de deur legt de nadruk op de vaste afstand, terwijl de cirkel alleen in de fantasie wordt getekend.
Opdracht 4: Als opdracht 3, maar in dit geval neemt men het resultaat waar, terwijl in 2 een activiteit wordt waargenomen. Een ander verschil is dat men hier de cirkel ziet, maar de constante afstand en het middelpunt moet fantaseren.
Opdracht 5: Als opdracht 3 en als zodanig een voorbereiding op de abstractie in opgave 8.
Opdracht 6: Als opdracht 2, waarbij de constante afstand en het middelpunt zijn vastgelegd. Maar hier wordt de activiteit niet geobserveerd en gefantaseerd, maar ook in feite uitgevoerd.
Opdracht 7: Hier wordt alleen het middelpunt en het eindresultaat waargenomen. De constante afstand blijft onzichtbaar. Men moet de straal fantaseren tussen de twee punten van de passer. In het begin moet ook de resulterende cirkel worden gefantaseerd.
Opdracht 8: Reflectie op de ervaringen en abstractie van de gemeenschappelijke elementen en hun onderlinge relaties uit de verschillende contexten.
Opdracht 9: Formalisering van de resultaten.

Op het eerste gezicht mag dit allemaal wat gecompliceerd lijken. We geloven echter dat veel ervaren leraren op deze manier werken zonder het in zoveel woorden uit te drukken. Het is daarom, geloven we, niet al te moeilijk lessen voor te bereiden (of leerteksten te schrijven) waarbij bovengenoemde ideeën een rol spelen. Het is ook niet al te moeilijk omdat er niet vanuit niks begonnen hoeft te worden. We bevelen aan het voorbeeld van de cirkel te generaliseren tot een heuristische strategie voor het kiezen, ontwerpen en gebruiken van activiteiten in de klas. Men kan teksten uit schoolboeken analyseren en reflecteren op eigen lessen door vragen te stellen, zoals:

- Is er in de situatie (tekst uit het leerboek of eigen lesactiviteit) aandacht besteed aan herkenning?
- Wat zijn de basiselementen van het begrip en werd daar in de tekst of de les rekening mee gehouden?
- Wat zijn de relaties tussen de basiselementen en werd daar in de tekst of de les rekening mee gehouden?
- Welke activiteiten werden er van de leerling verwacht?
- Is er een goed evenwicht tussen doen en reflecteren?

Epiloog

We geloven dat de meeste, zo niet alle, onderwerpen uit de schoolwiskunde onderwezen kunnen worden volgens de hier beschreven principes. Het maakt er het leven van leraren en tekstschrijvers niet gemakkelijker op. Het kost ook veel tijd. Maar het zou het onderwijs wel meer afgestemd kunnen maken op de leerlingen en meer rekening kunnen houden met hun behoeften, achtergronden en capaciteiten.

Adressen van de auteurs
Dr. Joop van Dormolen, Rehov Harofeh 48A, Haifa 34367, Israël (joop@tx.technion.ac.il)
Dr. Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science, Department of Science Teaching, Rehovot 76100, Israël (ntarcavi@wiccmail.weizmann.ac.il)

Noot
[1] Dit artikel is eerder in het Engels ter publicatie aangeboden aan het Engelse blad voor wiskundeleraren Mathematics in School en in het Hebreeuws aan het Israëlische blad voor wiskundeleraren Aleh.

[Kruimel]

Wat een feest zo'n jaar van de wiskunde. Ik ben nog maar net nuchter. Het mooiste evenement is toch wel door de zuivere wiskundigen georganiseerd. Een echte pi-dag met de reserve-koning als eregast. Nou wil het verhaal dat die wiskundigen eigenlijk liever een postzegel wilden. Maar tante Pos was er tegen. Stel je toch eens voor dat de wiskundigen net als de kinderen bij de kinderpostzegels langs de deur moesten.

De deurbel. Je doet open en daar staat een wiskundige te vragen of je postzegels wilt kopen met de mededeling dat de opbrengst naar het afstudeerfonds voor de laatste wiskundestudent gaat.

Nee, dat zag tante Pos even niet zo zitten. Dus werd de grafsteen van Ludolf van Ceulen opgepoetst en in een kerk in Leiden opgehangen. De reserve-koning was duidelijk een avondje uit. Niet dat het echt jolig werd. Anders was hij wel spontaan de preekstoel opgesprongen en had uitgeroepen: Ik ben (wij zijn) koning Willem II.

$$\sqrt{(9a^6 - 12a^5b - 38a^4b^2 + 52a^3b^3 + 33a^2b^4 - 56ab^5 + 16b^6)}$$

De workshop 'Wiskunde op bijna vergeten scholen' van Harm Jan Smid op de eerste middag van het Lustrumcongres van de NVvW werd door een klein, maar buitengewoon geïnteresseerd groepje docenten bezocht. Vrijwel alle deelnemers waren zelf (M)ULO-leerling geweest of waren in de eerste of tweede graad verwant aan iemand die dit schooltype bezocht had. Door de vele vragen en opmerkingen tijdens de inleiding liet Harm Jan zich verleiden meer over de bijna vergeten scholen te vertellen dan hij gepland had, maar uiteindelijk was er toch nog even tijd om naar de opgaven te kijken die hij voor deze gelegenheid 'uit het archief gehaald en afgestoft had'. Dit waren de opgaven van de Eindexamens Rekenen, Stelkunde en Meetkunde in het jaar 1917 voor de MULO's te Batavia, Bandoeng en Buitenzorg.

Een bijna vergeten algoritme

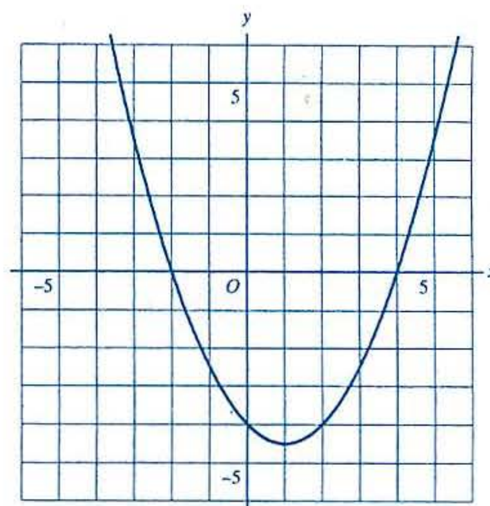
[Agnes Verweij, TU Delft]

Vooral de eerste opgave van Stelkunde intrigeerde me: 'Bepaal den vierkantswortel uit: $9a^6 - 12a^5b - 38a^4b^2 + 52a^3b^3 + 33a^2b^4 - 56ab^5 + 16b^6$.' Deze deed me denken aan een bijna vergeten algoritme: worteltrekken uit een getal door een soort 'staartdeling' uit te voeren. Dit algoritme demonstreer ik nog weleens aan studenten van onze lerarenopleiding als zij klagen over het verderfelijke effect dat de zakrekenmachine heeft op de cijfervaardigheid van de leerlingen van het voortgezet onderwijs. Zij menen zelf nog onafhankelijk te zijn van dit soort apparatuur en de daarvoor benodigde voeding. Dan kan ik het soms niet laten maar weer eens op te merken dat zij zonder elektronisch rekentuig toch niet de wortel uit bijvoorbeeld 503 in 4 decimalen nauwkeurig kunnen benaderen, iets waar ik mijn hand niet voor omdraai. Dit algoritme begon ik nu aan te passen voor het geval van bovenstaande Stelkunde-opgave. Dat lukte niet snel genoeg om mijn oplossing in de nabespreking te kunnen inbrengen. De oplossing die aan het eind van de workshop als de, destijds waarschijnlijk, gebruikelijke werd aangedragen, was de volgende. Je kunt er wel van uitgaan dat de gegeven uitdrukking een volledig kwadraat is en dat niet bedoeld is als antwoord 'den' (niet-negatieve) wortel te geven, maar dat 'een' polynoom dat in het kwadraat de gegeven uitdrukking oplevert, volstaat. Rekening houdend met de eerste en de laatste term van de gegeven uitdrukking schrijf je nu je antwoord alvast als $3a^3 + x \cdot a^2b + y \cdot ab^2 + 4b^3$, je kwadrateert, werkt de haakjes weg, neemt gelijksoortige termen bij elkaar, en stelt de coëfficiënten van die termen gelijk aan de coëfficiënten van de overeenkomstige termen van de gegeven uitdrukking. Zo krijg je een stelseltje vergelijkingen in x en y dat gemakkelijk is op te lossen.
Dat dit de gebruikelijke methode was, kon ik niet geloven. Deze werkwijze past naar mijn idee veel minder goed bij het sterk algoritmische reken- en stelkundeonderwijs van de MULO uit het begin van de vorige eeuw dan de oplossing waarmee ik was begonnen. Toen ik in de trein naar huis mijn oplossing afmaakte en zag hoe eenvoudig deze was, was ik er helemaal van overtuigd dat dit dé methode is geweest. Bovendien werd nog tot enkele jaren geleden voor een vergelijkbaar probleem, het delen van een polynoom door een polynoom van lagere graad, in het voortgezet onderwijs ook een aangepaste vorm van de staartdeling voor het delen van twee getallen gebruikt; zie *figuur 1*, waarin een fragment is afgedrukt uit 'Moderne wiskunde bovenbouw 5v-B' [1]. Er wordt aan het eind wel gecontroleerd of het product van het antwoord met de deler het deeltal oplevert, maar de oplossingsmethode die *start* met het uitwerken van de haakjes van $(ax^2 + bx + c)(2x - 4)$ wordt in dit boek niet genoemd.

Ik geef mijn uitwerking van de stelkunde-opgave hieronder, genoteerd op de manier die ik tegenkwam bij de introductie van het worteltrekken uit een getal in een wiskundeboekje voor een ander bijna vergeten schooltype dat in de workshop nog even ter sprake kwam. Het is het boekje 'Wiskunde voor de M.M.S.' [2]. In *figuur 2* is een deel van de tekst van pagina 17 van dit boekje afgedrukt. Op pagina 16 is een aanzet gegeven tot een verklaring waarom het algoritme voor het worteltrekken uit een getal - én mijn variant daarop - werkt;

1

Voorbeeld $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}{2x - 4}$ met domein $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
Invullen van $x = 2$ geeft de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$.
Hiernaast staat de grafiek van $f(x)$; deze lijkt op een parabool.
Als de grafiek werkelijk een parabool is dan moet het voorschrift van $f(x)$ ook in de vorm
$f(x) = ax^2 + bx + c$ gegeven kunnen worden. Hiervoor is 'uitdelen' via een soort *staartdeling* een goede aanpak.



$$2x - 4 / x^3 - 4x^2 - 4x + 16 \backslash \tfrac{1}{2}x^2 - x - 4$$
$$\underline{x^3 - 2x^2}$$
$$-2x^2 - 4x$$
$$\underline{-2x^2 + 4x}$$
$$-8x + 16$$
$$\underline{-8x + 16}$$
$$0$$

Dus: $\dfrac{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}{2x - 4} = \tfrac{1}{2}x^2 - x - 4$ (voor $x \neq 2$)

19a Controleer door de haakjes uit te werken, dat
$(\tfrac{1}{2}x^2 - x - 4)(2x - 4) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

op pagina 18 wordt een kortere notatie besproken. Die notatie is nu niet van belang, en zo'n verklaring bedenken, dat laat ik graag aan u of aan uw leerlingen over.
Mijn oplossing van opgave 1 van het examen Stelkunde is:

	$\sqrt{(9a^6 - 12a^5b - 38a^4b^2 + 52a^3b^3 + 33a^2b^4 - 56ab^5 + 16b^6)}$	
$(3a^3)^2 =$	$9a^6$	Nu moet $(\Delta)^2 = 9a^6$ zijn. Kies daarom $\Delta = 3a^3$.
	$-12a^5b - 38a^4b^2$	Het dubbele van $3a^3$ is $6a^3$. Nu moet $\Delta \times (6a^3 + \Delta) = -12a^5b + \ldots$ zijn.
$-2a^2b \times (6a^3 - 2a^2b) =$	$-12a^5b + 4a^4b^2$	Kies daarom $\Delta = -2a^2b$.
	$-42a^4b^2 + 52a^3b^3 + 33a^2b^4$	Het dubbele van $3a^3 - 2a^2b$ is $6a^3 - 4a^2b$. Nu moet $\Delta \times (6a^3 - 4a^2b + \Delta) = -42a^4b^2$
$-7ab^2 \times (6a^3 - 4a^2b - 7ab^2) =$	$-42a^4b^2 + 28a^3b^3 + 49a^2b^4$	$+ \ldots$ zijn. Kies $\Delta = -7ab^2$.
	$24a^3b^3 - 16a^2b^4 - 56ab^5 + 16b^6$	Het dubbele van ... Nu moet ...
$4b^3 \times (6a^3 - 4a^2b - 14ab^2 + 4b^3) =$	$24a^3b^3 - 16a^2b^4 - 56ab^5 + 16b^6$	Kies $\Delta = 4b^3$.
	0	

Dus:
$$\sqrt{(9a^6 - 12a^5b - 38a^4b^2 + 52a^3b^3 + 33a^2b^4 - 56ab^5 + 16b^6)} = 3a^3 - 2a^2b - 7ab^2 + 4b^3.$$
Of $-3a^3 + 2a^2b + 7ab^2 - 4b^3$ natuurlijk, afhankelijk van de waarden van a en b.
Maar daarover zullen de MULO-leerlingen te Batavia, Bandoeng en Buitenzorg zich inderdaad niet druk hebben gemaakt, en hun leraren evenmin.

Noten

[1] Moderne wiskunde bovenbouw 5v-B, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1991, p. 44
[2] Dr. D. van Hiele-Geldof en G. Krooshof (met medewerking van Dr. P.M. Van Hiele en Dr. J. de Miranda): Wiskunde voor de M.M.S. (derde deel, J.B. Wolters, Groningen, 1962, prijs destijds f 3,90)

2

a. Niet alle getallen zijn (zoals in opgave 4f) kwadraten. Daarom zijn niet alle worteltrekkingen „opgaand". De methode blijft bij het benaderen van de wortels uit deze getallen dezelfde. Hier volgt een voorbeeld. Het getal 21876 heeft 5 cijfers. We verdelen het van achteren af in groepjes van twee cijfers. Dus zo: 2 18 76.

	$\sqrt{2\ 18\ 76} \approx 129$*)	
$1^2 =$	1	$1^2 < 2 < 2^2$
	1 18	Het dubbele van 1 is 2. Nu moet $\triangle \times 2\triangle \approx 118$ zijn. Kies daarvoor
$4 \times 24 =$	96	
	22 76	$\triangle = 4$, want 5×25 is te veel.
$9 \times 249 =$	22 41	De eerste twee cijfers van de wortel vormen nu het getal 12. Het dubbele van 12
	35	is 24. Nu moet $\triangle \times 24\triangle \approx 2276$ zijn. Kies $\triangle = 9$.

* Het teken $\approx$ betekent: is ongeveer gelijk aan.

Voortgang bijhouden in het studiehuis, hoe doe je dat?

[H. Boertien]

De invoering van het studiehuis heeft het onderwijs drastisch veranderd. De vaste verbindingen van vroeger van 'leerling-docent-lokaal' zijn vervangen door elastische lijntjes. Dat heeft consequenties voor het leren, voor de leerling en voor de docent. Beiden zouden zich vrijer in hun bewegingsmogelijkheden moeten voelen, maar dat lijkt toch wat te optimistisch gedacht.

Andere doelstellingen, andere opzet

De plannen waren zo goed. Het credo niet minder: 'Zelfstandig leren, leren samenwerken, de leerstof praktisch en flexibel kunnen gebruiken in diverse contexten, geen zelfstandigheid zonder vrijheid'. Fraaie leuzen voor een onderwijsmanifest. Vrijheid en flexibilisering, het klinkt mooi en weerspiegelt de tijdgeest. Hoe anders was het vóór de invoering van de profielen. Onderwijs was vooral klassikaal leren onder leiding van een docent. Maar daarbinnen moest iedere leerling zoveel mogelijk individueel zelfstandig werken. De oude beproefde werkwijze van de docent in de klas sluit door alle ontwikkelingen niet meer aan bij hoe er momenteel gewerkt moet worden. Zijn taak is een geheel andere geworden. Dit leidt in veel gevallen tot problemen bij de (her)inrichting van het onderwijs. Dit geldt over de vakken heen, maar ook binnen de vakken. Als Citogroep denken wij mee. Wij helpen de scholen graag bij het zoeken naar oplossingen.

Knelpunten

De nieuwe onderwijssituatie vraagt meer organisatie en planning. Zaken die vroeger volgens een vanzelfsprekend patroon gebeurden, zoals lesgeven en toetsen, verlopen nu heel anders en moeten nadrukkelijk gepland worden. Dat heeft allerlei consequenties.

Zo kon de docent zich destijds tijdens de klassikale lessen een redelijk goed beeld vormen van de vorderingen van de leerlingen. Dit beeld is nu vervaagd

tot een wazige contour omdat de vrijheid om het leerproces in te richten is verschoven van docent naar leerling. Leerlingen mogen hun studie op belangrijke punten zelf invullen met als gevolg individualisering van het leerproces. De docent is een coach geworden. De omstandigheden en (on)mogelijkheden op school bepalen doorgaans hoe de docent deze taak moet invullen. Dat vraagt veel inschikkelijkheid bij het plannen van het werk.
De grotere zelfstandigheid van de leerlingen vraagt meer begeleiding van de docent in vergelijking met vroeger. De leerstof moet echter toch nog voor een belangrijk deel uitgelegd worden. Maar het daarvoor beschikbare aantal uren is veel minder. Verder kost het veel inspanning en tijd om na te gaan wat de leerlingen hebben opgestoken. Informatie hierover is nodig voor rapportage aan ouders en schoolleiding, of om leerlingen die bij hun studie zijn vastgelopen, weer op weg te kunnen helpen.
Op veel scholen klagen docenten dat de leerlingen met de vrijheid die ze hebben bij het studeren niet het bedoelde of vereiste wiskundeniveau weten te halen. Of dat geen van beiden goed weet hoe de stand van zaken is. Dat er te weinig tijd is om hierop in te spelen. Vandaar de vraag naar effectiever en efficiënter onderwijs. De geluiden uit het onderwijsveld over wat op dit punt gerealiseerd wordt, zijn niet erg opzienbarend. Kortom er zijn nog geen standaardoplossingen gevonden hoe de leerlingen het best begeleid kunnen worden. Wat wel duidelijk is, is dat scholen te weinig geld en middelen hebben om deze problemen op te lossen.

opgaven zijn op de leerlijn gefocust

Leerproblemen
Leerlingen verwerken de leerstof blijkbaar onvoldoende. Vooral bij het vak wiskunde blijkt dat nu een probleem. Wiskunde is moeilijk, is abstract. Er is veel tijd nodig om goed met abstracte begrippen en relaties om te leren gaan. Dit gold vroeger, maar dat geldt nog steeds. Er moeten dus andere factoren zijn die maken dat er nu meer mis gaat dan vroeger. Die factoren zullen waarschijnlijk samenhangen met de organisatieproblemen op school.

Gebrek aan interactie
Sommigen zien de slechte leerresultaten als een aanloopverschijnsel bij de invoering van het studiehuis: 'Iedereen moet aan de nieuwe situatie wennen. Als het studiehuis is ingeburgerd, zal alles beter gaan.' Natuurlijk is dit waar, maar is hiermee alles verklaard? Als dat waar is, zouden er in het tertiair onderwijs bij het vak wiskunde geen of weinig leerproblemen moeten zijn. Daar studeren studenten (weliswaar ouder dan 17 jaar) al langer wiskunde op de manier van het studiehuis. Toch hebben leerlingen ook daar nog steeds problemen met wiskunde. Om ze enigszins op te lossen zijn in vrijwel alle wiskundestudies verplichte groepspractica met sterk klassikale inslag ingesteld. Het is dus op zijn minst plausibel dat er in het studiehuis van het voortgezet onderwijs ook op langere termijn problemen met leerresultaten kunnen blijven bestaan.
Anderen wijten de leerproblemen in het vak wiskunde aan de aard van het vak. Zij betwijfelen of wiskunde een zelfleerbaar vak is. Zij stellen dat leerlingen (met uitzondering van de weinige zeer begaafde leerlingen) het vak wiskunde alleen via interactie met een docent kunnen leren. In het studiehuis is als gevolg van de studievrijheid juist deze interactie tussen docent en leerling sterk verminderd. Een deel van de oplossing van de gesignaleerde problemen in het voortgezet onderwijs zou dus *interactie vergroten* kunnen zijn. Dit hoeft niet te betekenen dat er meer persoonlijk contact moet zijn, ook andere interactiemiddelen zijn mogelijk.

Gebrek aan informatie
Het tekort aan (persoonlijke) interactie tussen docent en leerling heeft ook tot gevolg dat docenten vrijwel altijd achteraf merken, dat de vorderingen onder de maat blijven. Maar ook voor de leerlingen komen de teleurstellende leerresultaten meestal als een donderslag bij heldere hemel. 'En ik had het nog wel zo goed geleerd!', is een veelvuldig terugkerende uitroep bij het krijgen van onvoldoendes. Omdat niemand problemen voorziet is het ook niet mogelijk het leerproces tussentijds bij te sturen. Helaas kan dat ook niet achteraf. De opzet van zelfstandig studeren en de tijd die daarvoor beschikbaar is, laat dergelijke herhalingsoefeningen niet toe. Wanneer leerlingen de opgaven uit het boek niet kunnen maken, merken ze dat ze te weinig inzicht in de leerstof hebben. Dat hun inzicht ook tekort kan schieten als ze de opgaven uit het boek wel kunnen maken, is iets waarop ze niet rekenen. Dat dit toch systematisch voorkomt heeft een eenvoudige verklaring.
De leerstof in het leerboek is ingedeeld in leerlijnen. De opgaven zijn zo gekozen dat ze datgene wat in het hoofdstuk behandeld wordt, zo goed mogelijk naar voren brengen. De aandacht voor verbindingen met andere vakinhouden is beperkt, *want dat geeft ruis*. De meeste opgaven zijn op de leerlijn gefocust en bedoeld om de uitleg van de aan te leren oplossingsmethoden te ondersteunen. Opgaven in de leergang die het te leren onderwerp met andere delen van de leerstof in verband brengen, staan vaak niet bij het te bestuderen hoofdstuk. Ze vallen dus buiten de gezichtskring van de studerende leerling. Dit maakt dat de leerling onbedoeld dikwijls één manier(tje) leert om bepaalde opgaven wiskundig aan te pakken en op te lossen. Het toepassen van de wiskunde wordt op deze manier versmald geleerd. De leerling haalt te weinig uit de leerstof. Zijn begrip heeft te weinig diepgang. Het lukt

hem wel om de opgaven in het boek op te lossen, maar toepassen van de daarbij aangeleerde wiskunde in andere situaties (transfer) lukt niet goed.
Vroeger zorgde de docent bij de uitleg van de leerstof voor extra diepgang door inzichtvragen bij de leerstof te stellen, die voor de logische verbindingen in de leerstof zorgden of door (extra) opgaven te geven waarin de integratie van leerstof gerealiseerd was.
Als leerlingen alleen (eenvoudige) opgaven uit het boek als studiemateriaal krijgen, dan worden ze te weinig geconfronteerd met andere toepassingsmogelijkheden van de wiskunde. Een mogelijkheid om het leerproces op dit punt te verbeteren is de leerlingen extra leergang-onafhankelijke opdrachten te laten maken.
Het effect hiervan komt het best naar voren wanneer leerlingen voor het eerst in hun schoolcarrière als examenvoorbereiding een oefenexamen voorgelegd krijgen. De leerlingen blijken dan veel opgaven niet te kunnen maken, hoewel ze al wel de daarvoor benodigde leerstof bestudeerd hebben. Pas wanneer ze voldoende oefenexamens gemaakt hebben, zijn de (opgaven en) resultaten ongeveer zoals verwacht en is de examenvoorbereiding afgerond.
De hiervoor gegeven analyse van studieproblemen in het studiehuis geeft aanknopingspunten voor een betere (efficiënter en effectiever) opzet van het onderwijs. Hierna gaan we daarop in.

Eerst leren dan toetsen voldoet niet meer

In de voorgaande decennia werd de toetsing meestal gezien als een afsluiting van onderwijs. Dat kon toen ook. De docent zag van tevoren aan de manier waarop de leerlingen werkten wel ongeveer wat het resultaat ervan zou zijn. Hij kon ook eenvoudig het leerproces tussentijds bijsturen. In de huidige onderwijssituatie kan dit niet meer. De volgorde 'eerst leren, dan toetsen' voldoet niet meer.
De voordelen van de nieuwe opzet van het onderwijs - meer zelfstandigheid, beter leren studeren, samenwerken en creatief omgaan met het geleerde - brengen dus ook nadelen met zich mee. Het gaat erom deze nadelen te minimaliseren zonder de voordelen teniet te doen. Dat vraagt wel om een andere opzet van het onderwijs, waarbij leren en toetsen op een andere manier samenwerken.

Coaching met transfer

Zowel leerling als docent moeten onderweg merken dat het leerproces 'al dan niet goed geland is'. Zoals hiervoor beredeneerd, kan dat niet met de soorten opgaven waarmee zojuist geoefend is. Meer van hetzelfde is niet voldoende. Pas een andere blik op wat geleerd is, kan tot een groter inzicht leiden. Het is nodig dat de docent in het leerproces hieraan speciale aandacht besteedt. Dit kan - zoals gezegd - door leerlingen extra leergang-onafhankelijke opdrachten en/of toetsen te geven. Leerlingen kunnen door ze te maken zelf merken en laten zien dat zij de leerstof samen met wat al eerder geleerd was, kunnen toepassen. Voor het goed kunnen inzetten van dergelijke opgaven en toetsen is een uitgebreid correctievoorschrift nuttig. Dit correctievoorschrift moet zo opgezet zijn dat leerlingen het kunnen begrijpen als ze een poging hebben gedaan de opgave te maken. In dat geval kunnen docenten de extra opdrachten als volgt inzetten.
Een leerling komt bij de docent en geeft aan dat hij of zij wil beginnen met het bestuderen van een hoofdstuk. De leerling krijgt dan één of enkele opgaven mee om te maken zodra de leerstof ervoor bestudeerd is. De docent kan aangeven wanneer in het hoofdstuk de leerling een opgave kan maken. Maar de leerling kan ook zelf bepalen wanneer bij het bestuderen van het hoofdstuk een opgave gemaakt kan worden. Zodra het maken van de opgave problemen geeft, kan de leerling andere leerlingen raadplegen, maar ook met de docent een afspraak maken om hints en informatie te krijgen.
Wanneer de leerling (bijvoorbeeld halverwege het bestuderen van het hoofdstuk) één of enkele opgaven gemaakt heeft, kan hij of zij de uitwerkingen en antwoorden inleveren bij de docent.
Daarmee worden twee doelen gediend: de leerling merkt zelf of hij of zij de pas geleerde wiskunde wel kan toepassen (kan integreren) en de docent krijgt zicht op hoe het leerproces vordert (informatie).
Het heeft geen zin de leerling het uitgebreide correctievoorschrift tegelijk met de opgaven te geven. Daar leren ze onvoldoende van. Delen van het correctievoorschrift kan de docent geven als de leerling vastloopt. Tegelijk met het inleveren van de uitwerkingen van de opgaven kan de docent het gehele correctievoorschrift geven. De leerling kan dan zien welke fouten er gemaakt zijn en verder studeren, terwijl de docent rustig de tijd heeft om de opgaven na te kijken.
Zo geeft de leerling de docent tijdens het leerproces inzicht in hoever hij of zij met de studie is gekomen. De docent kan reageren door de opgaven te bespreken of door een standaarduitwerking te geven.
Het onderwijsleerproces dat zo verloopt, heeft dus als kenmerken:
- extra leergang-onafhankelijke opgaven/toetsen voor transfer zijn in het leerproces verweven;
- de leerlingen geven aan de docent tussentijds extra informatie over hoe ze hun planning uitvoeren;
- de interactie wordt aangevuld met 'onpersoonlijke' interactie die weinig tijd vraagt.

Bij deze opzet kan de docent, net als in de vroegere onderwijssituatie, inschatten in hoeverre leerlingen de onderwijsdoelen bereiken.

extra leergang-onafhankelijke opdrachten geven

Opgavenverzamelingen

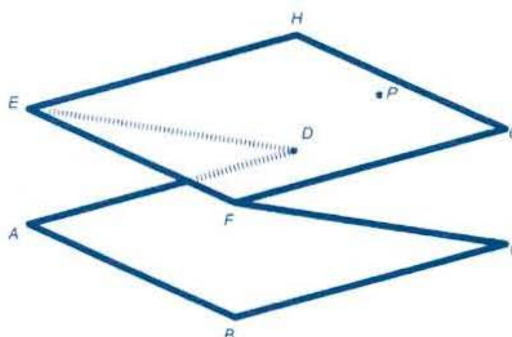
In het project Voortgangstoetsen van de Citogroep, worden opgavenverzamelingen gemaakt voor de tweede fase van havo en vwo die docenten kunnen gebruiken zoals hiervoor beschreven is. Maar het is ook mogelijk dat op een andere manier te doen. In 1998 is een eerste serie (zelf te bewerken) opgaven voor havo 4 en 5 uitgegeven. In mei 2000 is de tweede serie opgaven voor havo 4 en 5 uitgegeven. Momenteel worden opgaven voor het vwo geconstrueerd.
De beschikbare verzamelingen bestaan uit 27 en 35 grote opgaven (124 en 194 vragen) over allerlei onderwerpen met uitgebreid correctievoorschrift. De opgaven zijn methode-onafhankelijk en worden geleverd in elektronische vorm (Word-documenten), waardoor aanpassing en bijstelling voor gebruik eenvoudig is. U kunt er bijvoorbeeld toetsen mee maken die de wiskunde voor de leerlingen op een nieuwe manier aan de orde stellen. De leerlingen kunnen de opgaven ook zelfstandig doorwerken en zichzelf met behulp van een uitgebreid correctiemodel controleren, wat een behoorlijke tijdsbesparing betekent.
Via internet kunt u reacties geven op de opgaven. Wij kunnen die verwerken. Op die manier is het mogelijk de opgavenverzameling tussentijds te verbeteren of aan te vullen.
De nieuwste uitgave kunt u bestellen via *Toetsnet®*, ons distributiesysteem via internet. Daarnaast is natuurlijk ook de gebruikelijke papieren versie te bestellen.
Om een indruk te krijgen van de inhoud van de map kunt u een demo zien door in te loggen bij *http://www.cito.nl/vo/havovwo/voortgangstoetsen/wiskunde/eind_fr.htm.*
Door in de tekst die op het scherm komt, op Toetsnet® te klikken verschijnt een pagina met o.a. de knop Demo.
Het aanklikken hiervan geeft toegang tot de demobank na het intikken van 'demovo' en 'gast' (geen wachtwoord).
Daar kunt U voorbeeldopgaven inzien. Eén ervan wordt hieronder afgedrukt.
Wij hopen met deze beschouwing over het onderwijs en over de methode-onafhankelijke opgaven hiervoor denkstof en middelen aan te geven om in te spelen op het studiehuis. Op zijn minst hopen we enkele invalshoeken gegeven te hebben om over de problemen in het wiskundeonderwijs na te denken.

Over de schrijver
H. Boertien is wetenschappelijk medewerker wiskunde bij Citogroep.

SALONTAFEL

De afmetingen van een salontafel zijn 100 cm bij 100 cm bij 40 cm.
Het zwarte metalen frame bestaat uit negen buizen.
Het blad van deze tafel (*EFGH*) is een vierkante glazen plaat die recht boven het grondvlak (*ABCD*) ligt.
Hiernaast is deze salontafel weergegeven.
Deze figuur staat ook op een bijlage.

SALONTAFEL 'Zet': metalen frame zwart epoxy gelakt, blad van gezandstraald glas, afmetingen 100 x 100 x 40 cm, van f 650,- voor f 519,-



1. Bereken de totale lengte van de buizen in centimeters nauwkeurig.
2. Bereken de hoek die buis *BC* maakt met buis *ED* in graden nauwkeurig.
3. Noem alle buizen op die buis *ED* kruisen.

Op het glazen blad van de tafel in de figuur op de bijlage is met een viltstift punt *P* getekend.

Iemand tekent met viltstift op het glazen blad een lijn door punt *P* die buis *AB* kruist onder een hoek van 45 graden.

4. Teken zo'n lijn in de figuur op de bijlage.
5. Teken op een schaal van 1 : 10 een aanzicht van de salontafel als je kijkt in de richting *FH*.

Instroom

[Johan van Benthem]

Waarom houd je niet meer van me? Waarom is de liefde over? Menigeen staat voor de spiegel en vraagt zich af: wat heb ik verkeerd gezegd, ben ik verkeerd aangekleed, verkeerd getimed? Meestal ligt het niet zo deterministisch. Misschien is er echt niets mis met de verlatene, maar werkt de oude magie gewoon niet meer.

Instroom in de wiskundestudie

De instroom in de wiskundestudie is laag, en dat is best zorgelijk. Het nationale talent stroomt naar elders, en onze Brouwers en Lenstra's zitten misschien wel op de Amsterdamse effectenbeurs, of in de pan-Europese communicatie. Maar het lijkt me dat de oorzaken van deze verlating nauwelijks met de wiskunde zelf te maken hebben. Immers, het vak is inhoudelijk zeker niet lelijker geworden, wiskundigen als mensentype zijn zelfs wereldwijzer geworden (sommige hoogleraren zijn bepaald mediageniek). De rol van de wiskunde door de maatschappij en andere wetenschappen heen neemt alleen maar toe. Er is een *algemeen* probleem van instroom in exacte vakken, met name de fundamentele, theoretische kant - waarvoor ik eerlijk gezegd geen sluitende verklaring weet. Maar ik vermoed dat die verklaring breed cultureel is, en niet wiskunde-specifiek.

Hoe dan ook, weeklagen over de slechte tijden, hoe aangenaam op zich ook, heeft weinig zin. Als men minnaars of althans liefhebbers wil aantrekken is de beste strategie zelfbewustzijn, niet opzichtig 'vissen' naar affectie, en uitgaan van eigen kracht. Die eigen kracht zie ik in een aantal blijvende attracties van de wiskunde, die je telkens in de praktijk bij leerlingen en studenten kunt observeren. Er is het puzzelen, hard denken, en vinden van precieze oplossingen, zonder dat compromiskarakter van het dagelijkse leven - iets wat je intens kunt beleven als 'groter dan jezelf'. Er is de ervaring van zuivere schoonheid in diepe resultaten, waar velen wel degelijk toe in staat zijn (schoonheid kunnen ervaren is een talent). En er is de verwondering dat achter onze chaotische werkelijkheid vaste wiskundige patronen zitten, zoals bij een modellering van onze dagelijkse irritaties in wachttijdtheorie. En zoals ik al zei: wiskunde wordt alleen maar belangrijker door de wetenschappen heen. Waar vroeger met Galileo 'het Boek der Natuur in wiskundige taal was geschreven', lijkt thans hetzelfde te gelden voor het Boek der Cognitie, zoals ik om me heen zie in mijn eigen onderzoek naar logische structuren in informatieverwerking.

Omgaan met veranderingen

Hoeft er dan helemaal niets te veranderen? Er zijn zeker dingen te verbeteren in de modus operandi van de Nederlandse wiskundige gemeenschap, die de situatie op termijn gunstig kunnen beïnvloeden. Ten eerste is er de brede culturele rol van de wiskunde, zoals benadrukt in Morris Kline's book 'Mathematics in Western Culture'. Die rol vernieuwt zich nog steeds, en soms merk je dat ook aan nieuwe boeken, zoals de 'ideeënroman' van Hofstadter, 'Gödel, Escher, Bach', of Simon Singh's 'The Code Book'. Waarom worden in

Blues

Nederland niet van dat soort boeken geschreven door wiskundigen met schrijftalent? Wat *niet* werkt zijn obligate krantenstukjes over Fermat's Last Theorem – want die versterken juist het idee dat de wiskundigen weer eens met geweldige moeite iets hebben opgelost 'geheel tot hun eigen bevrediging'.
Ten tweede is er de openheid van de wiskunde naar buiten. Veel van de spannendste recente wiskundige 'veroveringen' in andere vakgebieden (informatica, economie, taalkunde) worden helemaal niet door kern-wiskundigen gedaan, maar door aparte groepen, die kennelijk geen nut ervaren van interactie met de 'oude elite'. Zulk isolement impliceert gemiste kansen: wie aantrekkelijk wil wezen, moet op zijn minst breed zichtbaar zijn.
Ten derde is er het determinisme in ons universitaire bestel dat mensen dwingt zichzelf te definiëren in enge categorieën, zoals 'zuiver' versus 'toegepast', 'wiskundige' versus 'natuurkundige' of 'taalkundige'. Zulke labels passen slecht op de intellectuele realiteit van creatieve geesten. Wetenschappelijke rolmodellen die een stevig stuk wiskunde mengen met andere activiteiten lijken me voor een vak even belangrijk als 'zuivere exemplaren' van het genre. En die gemengdheid, over een bèta/gamma/alfa breedte, lijkt me ook karakteristiek voor het talent en de interessen die we tegenwoordig op de middelbare school aantreffen.

Het wiskundig instituut als brandpunt

Idealiter zou ik een wiskundig instituut zien als een centrale universitaire plek, open voor bèta, gamma en alfa – zowel qua onderzoekslijnen als qua studiepaden. Het zou juist een van de weinige plekken zijn waar je een geheel der dingen kunt zien, omdat de wiskunde een van de weinige integrerende intellectuele krachten is door de universiteit heen. Wie zou daar niet willen in-, of althans doorstromen? .
Tja, als ik die *zou*'s nog eens herlees, dan is dit stukje toch klaaglijk geëindigd. Zij het dan niet over de moderne jeugd, maar over de georganiseerde wiskunde. Maar ik ben helemaal niet negatief gestemd! Vele tekenen des tijds maken mij optimistisch over het vermogen van de Nederlandse wiskunde mooi te zijn – en gevonden te worden.

Over de schrijver
Johan van Benthem werkt aan het Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam.

Bron
Dit artikel is met toestemming overgenomen uit het Nieuw Archief voor Wiskunde, 5-1-3, september 2000.

Aankondiging



Perspectieven voor de wiskunde in het HBO

De werkgroep HBO van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) organiseert onder bovenstaande titel een congres-bijeenkomst op

vrijdag 18 mei 2001

in de Hogeschool Domstad,
Koningsbergerstraat 9, Utrecht
(10 min. lopen van het CS, uitgang Jaarbeurs).

Het voorlopige programma kent de volgende onderwerpen:
- Ontwikkelingen in de 2e fase / studiehuis
- Competenties en het wiskunde-onderwijs (*)
- Samenwerking met vakdocenten
- Wiskunde-didactiek in het algemeen
- Statistiek
- Computer-algebra
- Grafische rekenmachine
- Overige ICT zoals WebCT, Blackboard en Teletop
- Websites
- Leveranciers
- Demonstraties van eigen werk

Er is weinig plenair maar er zijn juist veel workshops. Eind maart wordt het definitieve programma vastgesteld.

Kosten: *f* 175,- per persoon.

Indien u op grond van deze vooraankondiging al weet dat u zult komen, dan kunt u zich schriftelijk of via e-mail aanmelden bij de secretaris van de werkgroep HBO,
Jan Blankespoor (*bl@thrijswijk.nl*),
Technische Hogeschool Rijswijk,
Lange Kleiweg 4, 2288 GK Rijswijk,
òf via een digitaal aanmeldingformulier op de website van de HBO-werkgroep,
http://www.nvvw.nl/wg-hbo-nieuws.html

(*)
De notitie van de werkgroep HBO over 'Competenties en wiskundeonderwijs' is beschikbaar in PDF-formaat op http://www.nvvw.nl/wg-hbo-nieuws.html



Van de bestuurstafel

[Marian Kollenveld]

Lustrum afterparty

Voor allen die niet in de gelegenheid waren om het lustrum persoonlijk met ons te komen vieren tijdens het congres, hebben we nog een verrassing in petto. Ook u zult merken dat uw vereniging jubileerde, en we hopen dat uw collega's hierdoor ernstig gestimuleerd worden om zich ook aan te melden.

Het jubileumboek

Er is al veel over geschreven, een boek dat u niet mag missen. Stuur een kaartje naar de ledenadministratie en het komt in de bus. Weliswaar niet meer voor de speciale voorintekenprijs, maar nog altijd voor een vriendenprijsje.

Niet meer!!

Uit de enquête die we enige jaren geleden gehouden hebben bleek onder meer dat de leden tevreden waren met de activiteiten van de Vereniging, en niet vonden dat we meer moesten organiseren. Daar zijn we u zeer dankbaar voor; ik denk niet dat we veel meer zouden aankunnen. Ga maar na. Het lustrum is net afgesloten, de regionale bijeenkomsten staan alweer te stomen op de rails (zie elders in dit nummer), de zaaltjes voor de examenbesprekingen zijn reeds gereserveerd, en we hebben ook een thema voor de volgende jaarvergadering bedacht.

Jaarvergadering 2001

We denken aan 'Buiten de boekjes, maar binnen het programma'. Veel buitenlanders verbazen zich over het feit dat in het Nederlandse onderwijs de 'methode' zo'n centrale rol vervult. We kunnen dat, gezien de situatie in ons land, wel verklaren, maar we trekken het ons ook wel aan. Meer vrijheid om zelf je onderwijs in te vullen; eigen keuzes maken, niet altijd maar braaf het boek volgen, zijn zaken die ongetwijfeld velen met ons aanspreken. En het past ook binnen de vernieuwing, met aandacht voor praktische opdrachten, GWA, profielwerkstukken, enz. Maar als het er allemaal 'bovenop' komt, vergaat je de lust al snel. Vandaar dat we op zoek willen gaan naar activiteiten, die weliswaar buiten het boekje, maar toch binnen het programma vallen. Dus niet 'bovenop', maar 'in plaats van'. In dit stadium kunnen we nog veel goede ideeën gebruiken, dus aarzelt u niet en neem contact op met ons als u denkt een bijdrage te kunnen leveren.

Opgavenbundels havo/vwo

De Vereniging heeft een lange traditie in het mede verzorgen van opgavenbundels die gebruikt kunnen worden bij de voorbereiding op het examen. Momenteel wordt hard gewerkt aan de voorbereiding van bundels voor de nieuwe Tweede fase examens. Het is nog niet duidelijk of die bundels op tijd klaar zullen zijn voor de examens in 2001, maar voor 2002 zal het wel lukken.

Zebra

Nummer 9 is bijna uit. De titel is 'De veelzijdigheid van bollen', geschreven door Martin Kindt en Aad Goddijn. Zoals altijd weer te verkrijgen op de bijeenkomsten; en als lid-abonnee komt het boekje geheel vanzelf bij u thuis.

Betaald werk

Het platform VVVO heeft nu aan de minister gevraagd om bij de komende CAO-onderhandelingen ruimte te maken om bestuursleden van vakinhoudelijke verenigingen, net als bestuurleden van onderwijsvakbonden, in de gelegenheid te stellen deels betaald hun werk te doen. Dit verzoek wordt inmiddels door de bonden gesteund; dus wie weet wordt hier onze jarenlange inspanning beloond.

Felicitatie

Anne van Streun,
hoogleraar didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen aan de Rijksuniversiteit Groningen

Via een persbericht van de Rijksuniversiteit Groningen ontvingen we het bericht van de benoeming van Anne van Streun tot hoogleraar didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.
De redactie van Euclides en het bestuur van de NVvW feliciteren Anne van Streun van harte met deze benoeming. Anne is al jaren bezig met onderzoek naar wiskundeonderwijs, met name rond heuristisch wiskundeonderwijs, probleem oplossen en de toepassing van ICT in het (wiskunde)onderwijs. Daarnaast kennen we Anne als lerarenopleider en schoolboekauteur, eerst van Wiskundelijn en de laatste jaren van Moderne wiskunde.
We zijn verheugd dat zijn vele waardevolle activiteiten voor het wiskundeonderwijs worden bekroond met deze passende functie.

Regionale NVvW-studiebijeenkomsten



Ook dit jaar organiseren we weer deze plezierige vorm van korte nascholing, niet te ver weg, met certificaat.
U bent welkom op onderstaande locaties.

LEIDEN donderdag 29 maart
Visser 't Hooftlyceum,
Kagerstraat 1, tel. 071-5171661
NS uitgang Rijnsburgerweg
(8 min. lopen): links, 3e str. rechts.

EINDHOVEN woensdag 4 april
Fontys Hogeschool Werktuigbouwkunde, Rachelsmolen 1,
tel. 0877-877333
NS uitgang Noord (10 min. lopen): rechtdoor, weg over, na 300 m langs Kennedylaan linksaf (dus niét naar TU), gebouw R1.

ZWOLLE dinsdag 10 april
Greijdanuscollege, Campus 5,
tel. 038-4698698
NS uitgang Zuid (10 min. lopen): rechtsaf, schuin over parkeerterrein, tunnel door, rechtsaf, achter HS Windesheim.

We zijn erg blij dat ook nu weer een aantal mensen bereid is om hun specifiek werk binnen het wiskundeonderwijs aan u uit te dragen. Wij hopen dat er weer 'voor elk wat wils' is.
Daarbij hebben degenen die bij het vmbo werken, een wat ruimere keus dan andere jaren!

Programma

15.30-16.00 - ontvangst, koffie/thee
16.00-16.55 - plenaire voordracht door Dr. A. van Streun:
Hoe staat ons wiskundeonderwijs ervoor?

We hebben het 75-jarig jubileum van onze vereniging gevierd en in het prachtige jubileumboek is een overzicht gegeven van honderd jaar wiskundeonderwijs.
Waar staan we nu en waar gaan we heen? VMBO en onderbouw AVO en 2e fase?
In de voordracht worden de verdiensten van ons wiskundeonderwijs geïnventariseerd en wordt vooruit gekeken naar de toekomst.
Daarbij gaat het vooral om de rol en de functie van de leraar in een periode waarin zelfstandig werken de norm lijkt te worden. En wat wordt de invloed van ICT (goede software, digitale leeromgeving, laptopklassen) op ons onderwijs? Is het einde van het wiskundeonderwijs (Freudenthal: 2000) echt nabij? Of het einde van ons leraarsberoep? En hoe houden we ons het trendgevoelige management van het lijf?

16.55-18.05 - middagwerkgroepen (zie overzicht)
18.05-18.50 - eenvoudige maaltijd, verkoop posters, e.d.
18.50-20.00 - vooravondwerkgroepen (zie overzicht)


Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Certificaat
Wilt u een nascholingscertificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding uw voorletters en uw geboortedatum. U krijgt na afloop van de studiebijeenkomst het certificaat uitgereikt op vertoon van een identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele bijeenkomst hebt bijgewoond. Certificaten kunnen niet worden nagestuurd.

Kosten
De studiebijeenkomsten zijn gratis voor leden van de NVvW en voor degenen die bij aanmelding lid worden. Van niet-leden wordt een bijdrage van *f* 65,- gevraagd.
Voor de maaltijd en koffie/thee dient elke deelnemer *f* 17,50 te betalen.
Nieuwe leden betalen *f* 20,- contributie voor het resterende deel van het verenigingsjaar (studenten *f* 10,-) en ontvangen alle nummers van de lopende jaargang van Euclides.
Uw aanmelding en overschrijving van het voor u geldende bedrag op giro 4470718 t.n.v. NVvW te Dordrecht dienen uiterlijk te zijn geschied
- voor Leiden op 10 maart,
- voor Eindhoven op 17 maart,
- voor Zwolle op 24 maart.

Ter plaatse aanmelden is niet mogelijk.

Hoe aanmelden
Iedere deelnemer kan één middag- en één vooravondwerkgroep bijwonen. Voor elk daarvan dient men een eerste en tweede keuze op te geven in verband met de beperkte ruimte per werkgroep. In het algemeen geldt: wie zich ruim op tijd meldt, krijgt de eerste keuze.

I. Aanmelden via school
Aan elke school wordt ook nog een aankondiging met inschrijvingsformulier gestuurd. Breng uw collega's die nog geen lid zijn, mee. Het is een mooie gelegenheid om hen lid te maken! Maakt uw school het bedrag over, dan dient u het schoolinschrijvingsformulier in te zenden.

II. Privé aanmelden
Geschiedt de aanmelding en betaling met een overschrijvingsbiljet op uw eigen naam, vermeld dan de plaatscode Le, Ei of Zw, daarna de eerste en tweede keuze van respectievelijk de middag- en de vooravondwerkgroepen en vervolgens uw telefoonnummer (in verband met bereikbaarheid bij problemen) en, indien u een certificaat wilt, uw voorletters en geboortedatum.
Vermeld bij gebruik van girotel ook uw adres.

Voorbeeld:
LeDBRS 071-5123456 JP11-01-60
Mocht u niet over een schoolinschrijvingsformulier beschikken en u wilt zich toch met behulp hiervan aanmelden, dan bestaat de mogelijkheid om het formulier te downloaden vanaf de website van de NVvW (*http://www.nvvw.nl*).
Overigens treft u daar ook alle informatie over de studiebijeenkomsten aan.
Bij vragen of problemen over de aanmelding of de betaling kunt u zich wenden tot het commissielid Frans Osseweijer, tel. 078-6160576; in andere gevallen tot het bestuurslid Wim Kuipers, tel. 038-4447017.

Tenslotte
Uw inschrijving wordt niet bevestigd. Bij binnenkomst vindt u uw badge met de codes voor uw werkgroepen.
Wij wensen u alvast veel genoegen.

Overzicht middag-werkgroepen

A. Wiskunde en PGO
Hans Winsemius (ROC Landstede), *Henk van der Kooij* (Freudenthal Instituut)
In het mbo wordt de onderwijsvorm PGO stevig omarmd. Probleem Gestuurd Onderwijs laat leerlingen gedurende een periode van acht weken in groepen van 8 aan een thema werken, zoals: ontwerp een tuinhuisje (bouwkunde), hoe werkt een bierbrouwerij (werktuigbouw). Alle vakken komen daarin geïntegreerd aan bod. Een belangrijke vraag daarbij is, of en hoe de wiskunde (en de wiskundedocent!) binnen zo'n structuur overeind kan blijven. Binnen de meeste ROC's wordt bij de sectoren Techniek en Economie deze vorm al ingevoerd. De verwachting is ook dat het vmbo op termijn zijn vakken op een dergelijke manier gaat integreren. Voor mbo en vmbo wiskundedocenten staat de toekomst op de tocht!
ROC Landstede (Harderwijk) is voorloper bij het PGO.

B. Het examendossier: vaardig voor praktische opdrachten en sectorwerkstukken
Hannie Lensink (SLO, Enschede)
In het examenprogramma spelen vaardigheden een grote rol. Hoe breng je de benodigde vaardigheden aan, hoe beoordeel

je deze vaardigheden, hoe beoordeel je het proces, waar loop je tegenaan?
Het nieuwe programma vraagt van u als docent ook vaardigheden: hoe begeleid je leerlingen bij het maken van praktische opdrachten en sectorwerkstukken?
In de werkgroep praten we aan de hand van praktijkvoorbeelden en ervaringen over tips en adviezen, maar ook te verwachten struikelblokken en hindernissen.

C. Op weg naar een examentraditie in de tweede fase

Douwe Kok, Kees Hoogland (APS-wiskunde)
Zolang er examens zijn hebben wiskundedocenten keuzes gemaakt in de afbakening en het niveau van de leerstof. Die keuzes gingen vaak verder dan een juridische interpretatie van de examenprogramma's. Leraren wisten op den duur welke onderwerpen aan bod zouden komen en op welke manier. Dat inzicht was gefundeerd op een door velen gedeelde examentraditie. In de Tweede fase is er nog geen algemeen gedeelde interpretatie.
De werkgroep is bedoeld om een start te maken met de ontwikkeling van zo'n breed gedragen interpretatie van de examenprogramma's. De verschillende aspecten van niveau, afbakening, inzet van GR, onderling gewicht van de diverse domeinen en tempo zullen op een rijtje worden gezet.
Van de deelnemers wordt een actieve bijdrage verwacht in het formuleren van ideeën en meningen.
De bijeenkomsten krijgen mogelijk een vervolg in een constructieve forumdiscussie op de website van de NVvW.

D. Toetsen-hoe?

Harm Boertien (Cito-groep)
In de workshop wordt getoond waarmee het Cito voor de eerste drie leerjaren van het voortgezet onderwijs(keuze voor leerwegen en sectoren en havo/vwo) momenteel bezig is. Daarbij zijn twee activiteiten te noemen:
- de gewijzigde opzet van de bavo-toetsen;
- het ontwikkelen van een Volg- en Adviessyteem voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs.
Ook zullen achtergronden van onderwijs en toetsing aan de orde komen. Een en ander zal met voorbeelden ondersteund worden. Aan de docenten zal gevraagd worden wat ze van de plannen en opzet vinden.

E. Praktische opdrachten en Internet

Marianne Lambriex (SCE, Eindhoven)
In deze workshop krijgt u voorbeelden te zien van hoe op het Stedelijk College Eindhoven (SCE) met praktische opdrachten in 4- en 5-vwo en 4- en 5-havo wordt omgegaan.
Het SCE is een ICT-voorhoede school en voorloper in de Tweede fase. Er wordt nadrukkelijk gekeken naar de rol die Internet bij het ontwerpen en uitvoeren van PO's speelt, zowel voor de docenten als voor de leerlingen. Er wordt leerlingenwerk getoond en besproken hoe en waar relevante informatie van het Internet gehaald kan worden. En als er tijd over is, kan er aandacht besteed worden aan het beoordelen van PO's en vragen als: Wat is eigen de inbreng van de leerling?



Overzicht vooravond-werkgroepen

P. Cabri bij meetkunde in profiel vwo N&T

Wolfgang Reuter (alleen in Zwolle en Leiden)
Cabri kan geschikt middel voor de leerling zijn bij het ontdekken van wiskundige wetmatigheden. Maar ook voor de docent bij het introduceren van een nieuw onderwerp. In deze workshop (die geen Cabri-practicum is) worden voor beide mogelijkheden enkele voorbeelden gegeven. Daarna is er ruimte voor discussiëren en ervaringen uit te wisselen over het gebruik van Cabri. Onder andere over de vraag of Cabri helpt bij het vinden van een bewijsidee. En zo niet, wat dan wel.
De deelnemers van de workshop kunnen na afloop de getoonde Cabri-bestanden op diskette meenemen.

Q. Wiskunde als venster op de wereld

Gerard Verbeek (alleen in Eindhoven)
Vakdocenten hebben onder meer de verantwoordelijkheid om verbinding te leggen tussen de vakinhouden en de wereld van arbeid, beroep en vervolgstudie. Ook de docent wiskunde zal de betekenis van het vak zichtbaar moeten maken. Het krijgt betekenis binnen het keuzeproces van de leerling. De vakdocent krijgt hierdoor een eigen plek binnen de loopbaan- en

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

keuzebegeleiding. Tijdens de workshop gaan we verder in op de nieuwe inzichten en bespreken we de mogelijkheden voor een praktische invulling.

R. PTA

In de begeleiding van een aantal pilotscholen heeft het Cito ervaring. Welke mogelijkheden zijn er en welke problemen doen zich voor.
Op de website van de NVvW (*http://www.nvvw.nl*) wordt verdere informatie over deze workshop geplaatst zodra deze beschikbaar is.

S. Computergebruik in het vmbo

Peter van Wijk
Het eindexamen vmbo schrijft voor het gebruik van de computer te toetsen. Wat zijn de mogelijkheden om aan deze eis te voldoen? Welke software kan worden gebruikt en hoe moet er worden beoordeeld? U krijgt voorbeelden uit de praktijk. Wellicht dat we kunnen komen tot de opzet van een sectieplan. De workshop is bedoeld om u verder te helpen bij het benutten van de computer bij de methode.

T. Determinatie

Wim Kuipers
De invoering van de leerwegen en sectoren brengt met zich mee dat aan het eind van het tweede leerjaar een keus gemaakt moet worden.
Op welke manier verwijzen we voor het vak wiskunde naar een passende leerweg. Dat betekent dat we zicht moeten hebben op hoe de wiskunde er in de leerwegen uit ziet. Naast de vraag naar de leerstofinhoud komen dan zaken aan de orde die te maken hebben met vereiste vaardigheden, andere toetsvormen.
Hoe bereid ik mijn leerlingen voor op een passende leerweg?

U. Sectorwerkstuk

Anders Vink (APS-wiskunde)
In de theoretische leerweg en in de gemengde leerweg zullen de leerlingen voor hun examen een sectorwerkstuk moeten maken.
Op dit moment wordt dit in netwerken van het Cito op een aantal scholen uitgeprobeerd.
In deze werkgroep zullen aan de hand van voorbeelden uit deze netwerken de tot nu toe opgedane ervaringen met het sectorwerkstuk aan bod komen. U wordt uitgedaagd na te denken over hoe zo'n sectorwerkstuk op uw school vorm zou kunnen krijgen.

Mededeling

Wisforta

In de eerste oplage van de door de NVvW vervaardigde (cevo-goedgekeurde en door Wolters-Noordhoff uitgegeven) variant van de Formulekaart, opgenomen in het boekje 'Wisforta', isbn 90 01 65956 X, zaten helaas een aantal drukfouten.
In de tweede oplage van 'Wisforta' zijn die fouten hersteld.
Bezitters van exemplaren van de eerste oplage kunnen deze gratis omwisselen bij de uitgever.

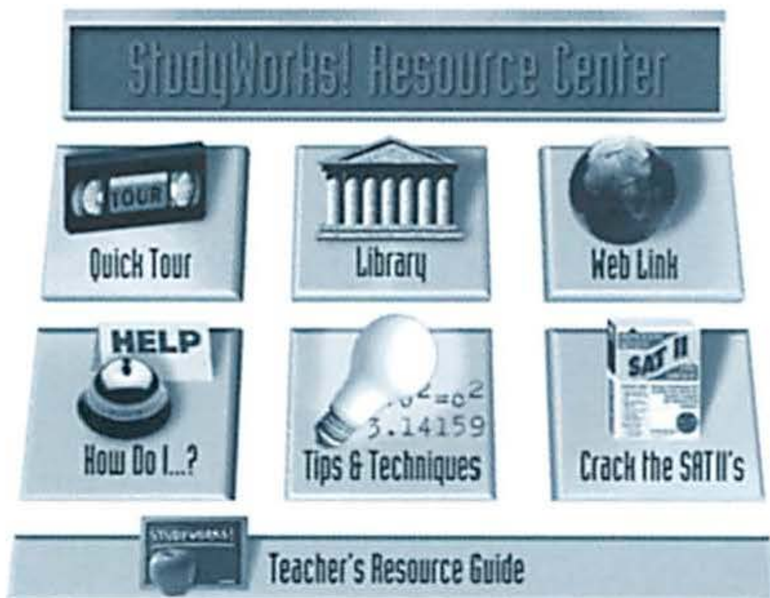
Waar gaat het om?

Als men voor 1 juli 2000 één of meerdere exemplaren van 'Wisforta' heeft ontvangen, dan is men waarschijnlijk in het bezit van deze foutieve druk.
De foute druk is te herkennen aan het volgende.

Op de pagina links van de inhoudsopgave staat bovenaan
0 1 2 3 4 / 04 03 02 01 00
De regel begint dus met een 0.
Als de regel begint met een 1, bezit men de nieuwe druk.

Voor het omruilen moet men even contact opnemen met de Afdeling Voorlichting Exact van Wolters-Noordhoff, telefoon: 050-5226311; e-mail: *voorlichting.vo.exact@wolters.nl*

In augustus 1999 is APS-wiskunde gestart met het project Digitale Leeromgeving Wiskunde waaraan inmiddels wiskundedocenten van acht scholen meewerken. De bedoeling van het project is ervaringen op te doen met het gebruik van digitaal lesmateriaal en computeralgebra in de klas.



Computeralgebra en digitaal lesmateriaal

Project Digitale Leeromgeving Wiskunde

[Henk Staal]

APS-wiskunde heeft gezorgd voor de ontwikkeling van materiaal voor de onderwerpen differentiëren en integreren, voor enkele praktische opdrachten, en voor een invulling van het keuzeonderwerp wiskunde voor de bovenbouw van het vwo. Een van de deelnemende docenten heeft zich bovendien gebogen over het onderwerp kwadraten en wortels voor klas 2 van het ivbo. Hoofdstukken over de betreffende onderwerpen uit leerboeken kunnen door de ontwikkelde digitale pakketten vervangen worden. De lespakketten zijn gemaakt in Studyworks, een softwarepakket dat naast mogelijkheden voor berekeningen, het tekenen van grafieken en computeralgebra ook een tekstverwerker heeft en daarom geschikt is voor het maken van onderwijsmateriaal.
In *afbeelding 1* is te zien hoe dat softwarepakket er leeg uit ziet.

Met het Studyworks Resource Center kan een bibliotheek met voorbeelden geraadpleegd worden en een internet-verbinding gemaakt worden voor meer documentatie. Het Resource Center is weg te klikken en dan kan er op de plaats van de cursor tekst getypt worden, maar er kunnen ook wiskunde-opdrachten gegeven worden. Het invoeren van allerlei wiskundige symbolen gaat via aanklikken op het zogenaamde Math-palette, dat ook in *afbeelding 1* te zien is.
Er kunnen ook vooraf gemaakte werkdocumenten geopend worden. In *afbeelding 2* staat een dergelijk document.
Leerlingen kunnen nu tussen deze opgaven zelf teksten typen en berekeningen of wiskundige bewerkingen uitvoeren. Het pakket met werkdocument vervangt op die manier boek, schrift, pen en grafische rekenmachine. Bovendien kan gebruikt gemaakt worden van de mogelijkheden die de computeralgebra in het pakker biedt. De uitleg en opdrachten in het werkdocument kunnen door de docenten naar eigen behoefte worden bijgesteld en aangevuld.

Er zijn meer softwarepakketten die deze mogelijkheden bieden. Voorbeelden zijn
TI-interactive, Scientific Notebook en Maple.
Voorlopig werd door de deelnemende docenten Studyworks als het meest geschikte pakket gezien, maar de bruikbaarheid van andere pakketten zal zeker verder onderzocht worden.

De stand van zaken per 1 oktober 2000 is dat in het schooljaar 99/00 alle deelnemende docenten bij minstens één onderwerp een experiment met het ontwikkelde materiaal in de klas uitgevoerd hebben. In het schooljaar 00/01 wordt dit herhaald, waarbij er geprofiteerd kan worden van de ervaringen die zijn opgedaan. Er zijn plannen om ook nog te gaan experimenteren met goniometrie in klas 4-havo en 4-vwo en met berekeningen met behulp van de stelling van Pythagoras in klas 2-ivbo.

De deelnemende docenten hebben het afgelopen jaar op verschillende manieren en in verschillende leerjaren gewerkt met dit materiaal en de ervaringen lopen dan ook sterk uiteen. In dit artikel worden enkele opvallende ervaringen uit het schooljaar 99/00 beschreven. De beschrijvingen zijn ontleend aan verslagen van de deelnemende docenten en observaties van medewerkers van APS-wiskunde. Om een idee te geven van het lesmateriaal laten we eerst een voorbeeld zien uit het lesonderdeel Integreren.

Het lesmateriaal

Het digitale lesmateriaal over het onderwerp Integreren bestaat uit vier hoofdstukken. In *afbeelding 3* en *afbeelding 4* staan fragmenten uit hoofdstuk 3. Op het moment dat leerlingen aan deze opgave toe zijn, is er al veel aandacht besteed aan de betekenis van de integraal, het schatten van de grootte van een integraal met behulp van een grafiek, en aan de vraag welk soort problemen met behulp van een integraal zijn op te lossen.

Leerlingen krijgen opdrachten zoals hierboven op het computerscherm en kunnen, werkend aan de computer, hun eigen uitwerking toevoegen aan het materiaal en het geheel bewaren onder een zelf gekozen naam.
Nadat een leerling aan het werk geweest is met opgave 8c kan het scherm er bijvoorbeeld uitzien als in *afbeelding 5*.
De integraal wordt door Studyworks berekend; het komt er voor de leerling op aan om de goede integraal op te stellen.

Het materiaal bevat ook computeranimaties die een aanschouwelijke ondersteuning bieden bij wiskundige begrippen. Een 'momentopname' van een dergelijke animatie uit het eerste hoofdstuk staat in *afbeelding 6*.
Bij het afspelen van deze animatie wordt stap voor stap de oppervlakte onder de linkergrafiek benaderd en

uitgezet in de rechtergrafiek. Met kleuren wordt dit nog geaccentueerd.

Ervaringen

Er waren grote verschillen te zien in de manieren waarop de docenten de lessen organiseerden. Aan de ene kant waren er docenten die de leerlingen het materiaal in een computerpracticum lieten doorwerken in hun eigen tempo. Aan de andere kant waren er docenten die het gebruikten als aanvulling op het leerboek, waarbij de gebruikelijke gang van zaken tijdens de lessen dan zoveel mogelijk gehandhaafd bleef. Hieronder volgen een paar voorbeelden.

Differentiëren als computerpracticum

Aan de R.S.G Ter Apel liet Klaas Wijnia de leerlingen van 4-havo het onderwerp Differentiëren doorwerken in het computerlokaal. Klaas werkt gewoonlijk met een schema waarin per week staat wat leerlingen af moeten hebben, maar met opzet had hij bij dit experiment geen werkschema gemaakt. Totaal waren er 14 lessen nodig, waarvan 6 lessen werden besteed aan het leren werken met Studyworks. Dit laatste gebeurde met een speciaal gemaakte handleiding die ook oefeningen bevat. De leerlingen vonden het prettig om de stof aan de computer in eigen tempo door te werken en er waren al na een paar lessen behoorlijke tempoverschillen te zien. Er ontstond een groepje leerlingen dat gelijk opwerkte en elkaar vaak hielp. De overige leerlingen werkten individueel.

Klaas vindt dat de stof oppervlakkig werd verwerkt. Leerlingen doen de oefeningen wel maar begrijpen vaak niet wat ze daar van op moeten steken. Na deze serie lessen was het nodig om in een aantal klassikale lessen de zaken op een rijtje te zetten. Klaas pleit er dan ook voor om het materiaal te splitsen in een papieren deel met overzichten en samenvattingen van de stof en een digitaal deel met de oefeningen. Klaas zal een volgende keer toch weer werken met het vertrouwde werkschema: de opdracht aan de leerlingen om de stof in 7 weken af te hebben was te globaal. Voor trage leerlingen was er extra tijd in het computerlokaal gereserveerd, maar deze leerlingen hebben daar geen gebruik van gemaakt.

Computerpracticum en klassikale momenten

Op de J.S.G. Maimonides in Amsterdam werden aan differentiëren (in 5-vwo wiskunde A) ongeveer evenveel lessen besteed: 15 lessen in totaal, waarvan 5 lessen voor het leren werken met Studyworks. De leerlingen werkten in tweetallen. Tijdens de lessenserie waren er drie klassikale momenten naar aanleiding van door leerlingen ingeleverde uitwerkingen van opgaven. De uitwerking van de opgaven werd bewaard op een schijfje en aan het eind van elke les moesten enkele tweetallen de uitwerkingen voor die les inleveren. Deze werden vervolgens door docent Willem Hoekstra gecorrigeerd en op de server gezet, zodat iedere leerling de volgende les de gecorrigeerde uitwerkingen kon raadplegen. Na het doorwerken van de handleiding Studyworks was er een individuele toets aan de

1 2 3 4

Van stroom naar totale hoeveelheid

In een spaarbekken bevind zich een voorraad drinkwater voor een waterleidingbedrijf. Er stroomt voortdurend water in het bekken (de instroom) en er wordt ook steeds water aan het bekken onttrokken (de uitstroom). Dit verschil noemen we "stroom" dus:

stroom = instroom - uitstroom

In de grafiek hieronder is het verschil tussen in- en uitstroom uitgezet tegen de tijd. In de grafiek gaat het om een periode van 24 uur. Aan het begin van deze periode zat er 9240 m^3 water in het spaarbekken.

Het verschil tussen instroom en uitstroom wordt weergegeven door de volgende functie:

$$\text{stroom}(t) = -0.0518\,t^4 + 2.929\,t^3 - 52.99\,t^2 + 307.6\,t - 57.5$$

computer en na het doorwerken van Differentiëren was er een toets in tweetallen aan de computer.
Deze manier van werken werd door de leerlingen gewaardeerd. Willem had van tevoren het materiaal een andere structuur gegeven om de leesbaarheid te verbeteren: hij had de tekst opgedeeld in kleinere eenheden die elk ongeveer op één scherm pasten. De opgaven stonden in aparte documenten die via hyperlinks geopend konden worden. Toch werd de theorie door leerlingen slecht gelezen. Meestal werd meteen de opgave aangeklikt en als die problemen gaf, werd vluchtig de bovenstaande theorie bekeken. Dit had als gevolg dat de leerlingen vaak vastliepen bij de 'reflectievragen' en de hulp van de docent in moesten roepen. Leerlingen waren over het algemeen wel handig in het terugvinden van informatie uit vorige hoofdstukken en hadden een goed inzicht in de structuur van het lesmateriaal. Er werd veelvuldig informatie uit de theorie door knippen en plakken opgenomen in de uitwerking van de opgaven.
Leerlingen die ook wiskunde B doen hadden de neiging om de hoofdstukken die gingen over differentiequotiënten, over te slaan en direct met het differentiëren te beginnen.

Naar de indruk van Willem hebben leerlingen voldoende opgestoken over het concept van de afgeleide functie, meer zelfs dan bij de gebruikelijke manier van werken. Die indruk is gebaseerd op de resultaten van de toets en op de – afgeluisterde - fluistergesprekken die leerlingen in tweetallen mochten voeren bij het maken van de toets. In deze gesprekken kwamen zowel het idee van het benaderen van veranderingen op een moment door de gemiddelde veranderingen op steeds kleiner wordende intervallen als het interpreteren van de grafiek van de afgeleide functie veelvuldig aan de orde. Met dit experiment konden de eerste paragrafen van het hoofdstuk Differentiëren uit Getal en Ruimte vervangen worden, waarbij moet worden toegevoegd dat het doorwerken van deze paragrafen uit het boek vermoedelijk minder dan 10 lessen gekost zou hebben.

Twee parallelklassen 5-vwo op het Ichthus College

Opmerkelijk zijn de experimenten met integreren in twee parallelklassen 5-vwo wiskunde B op het Ichthus College in Veenendaal verlopen. Opmerkelijk, omdat in de klas van wiskundedocent Ab van der Roest zowel docent als leerlingen aanvankelijk nogal terughoudend waren over het werken met computer, maar gaandeweg steeds meer waardering kregen over deze manier van werken. In de klas van collega Roel Veerbeek daarentegen waren de leerlingen aanvankelijk zo enthousiast dat ze door Roel aan het eind van de les het computerlokaal uitgeduwd moesten worden, maar later sloeg dit enthousiasme om in een dusdanige tegenzin dat besloten werd voortijdig het experiment te stoppen en het integreren verder te bestuderen uit Getal en Ruimte. En dat terwijl de docenten de lessen op dezelfde manier organiseerden.

Voordat de leerlingen begonnen met het experiment, zijn de bedoelingen toegelicht. De leerlingen kregen een studiewijzer die bestaat uit twee A4-tjes. Hierop stond in het kort:
- de bedoeling van het experiment;
- wat er per les gedaan moest worden en wat het huiswerk was;
- aanwijzingen voor het opstarten van het Studyworks-materiaal;
- enkele tips voor de manier van werken.

Alle lessen vonden plaats in het computerlokaal en in bijna elke les was een centraal moment waarin uitgelegd werd, huiswerk besproken werd, of gebleken problemen met de computer aan de orde kwamen. Eerst werden in 3 lessen de hoofdstukken 1 tot en met 8 van de Handleiding Studyworks doorgewerkt. Dit bleek te krap te zijn: de leerlingen hadden meer tijd nodig en kregen die ook. De klas van Ab werkte daarna in 13 lessen het onderdeel integreren door. De klas van Roel stopte hier halverwege mee. Behalve het Studyworks-materiaal werden ook opgaven uit het leerboek gemaakt. In een overzicht was precies aangegeven wanneer wat aan de orde was, omdat de docenten ervoor hadden gekozen al tijdens het computerexperiment zaken te behandelen die de leerlingen 'met de hand' moeten kunnen (zoals primitiveren). Leerlingen switchten dus regelmatig van computer naar boek en kregen van de digitale hoofdstukken over integreren ook een uitdraai op papier. Opgaven werden op een apart scherm gemaakt, waardoor er dus vaak met twee schermen boven elkaar gewerkt moest worden om bijvoorbeeld functie-voorschriften naar het scherm met de uitwerking te kopiëren.

Met beide klassen is na afloop van het experiment een gesprek gevoerd over de ervaringen. De meningen van beide klassen over de leerzaamheid staan diametraal tegenover elkaar. In de klas van Ab waren leerlingen unaniem van mening dat in het digitale materiaal veel beter uitgelegd wordt waar het over gaat, dat je beter snapt waar je mee bezig bent en meer het idee hebt dat je het zelf doet. In de klas van Roel vonden de leerlingen juist dat je niet snapt waar je mee bezig bent: je komt er wel uit door een voorbeeld precies na te doen, maar daar leer je niet van. Verder viel op dat leerlingen in de klas van Roel veel klachten hadden over technische problemen bij het werken aan de computer (het lukte vaak niet om het werk te bewaren; delen van het scherm vielen soms weg) en dat er in de klas van Ab geen problemen waren met technische storingen. De leerlingen deden de suggestie om alle opgaven aan het eind van de paragraaf te zetten. Daar staat ook al een verzameling opgaven onder het kopje 'Toepassingen' en leerlingen vonden die veel leerzamer dan de opgaven die tussen de instructies en uitleg stonden: ze gaven aan dat ze die te gemakkelijk vonden.

Een van de oorzaken voor het opvallende verschil in ervaringen tussen de beide klassen is vermoedelijk dat de leerlingen van Ab hun uitwerkingen in aparte files

opsloegen, terwijl de leerlingen van Roel ze toevoegden aan de bestaande documenten. Hierdoor ontstonden bij deze leerlingen omvangrijke documenten die problemen gaven bij het opslaan. Zonder waarschuwing vooraf mislukte dit vaak en ging werk verloren. Dat is natuurlijk heel frustrerend. Verder liepen leerlingen vast op het moment dat er voor het eerst gewerkt werd met het sommatieteken. In het materiaal wordt verondersteld dat leerlingen hier al ervaring mee hebben, maar dat was met deze klassen niet het geval. Ab greep hier in door een klassikaal moment in te lassen. Bij Roel hebben leerlingen wat langer moeten worstelen om er zelf uit te komen. Roel verwacht overigens een volgende keer veel minder problemen omdat hij nu zelf ingevoerd is in allerlei eigenaardigheden van het programma Studyworks.

Digitaal lesmateriaal in het ivbo

Hans van den Elsen van het Jeanne d'Arc College in Gronsveld sloot zich bij het project aan, omdat hij verwachtte dat hij met behulp van de computer de rekenproblemen die zich voordoen bij het wiskunde-onderwijs in het ivbo kan voorkomen. Hij heeft daarvoor de stof uit een hoofdstuk uit Getal en Ruimte omgewerkt tot digitaal lesmateriaal. Het gaat in dat hoofdstuk om het leren werken met verbanden als

$$y = x^2 + 2 \qquad y = \sqrt{x} \qquad y = \frac{36}{x}$$

Dergelijke formules worden eerst weergeven met behulp van een schema dat stap voor stap aangeeft wat een leerling moet doen met een invoer x om de bijbehorende uitvoer y te krijgen. Leerlingen oefenen om de schema's te leren lezen en om te zetten in een formule, waarbij ook een grafiek wordt getekend. Het rekenwerk bij al deze handelingen kan ook door de computer worden gedaan. Een voordeel ten opzichte van de rekenmachine is dat alle informatie die een leerlingen nodig heeft (wiskunde en bediening van de computer) op één scherm bij elkaar gebracht kan worden en dat leerlingen in datzelfde scherm de opdracht kunnen uitvoeren, ook als het gaat om het tekenen van een grafiek. *Afbeelding 7* laat een fragment zien van het materiaal dat door Hans in Studyworks gemaakt is.

Voordat leerlingen begonnen met de eigenlijke lesstof, werd eerst een half uur besteed aan kennismaken met het programma Studyworks. Dat kon zo kort zijn omdat instructies voor de bediening van de computer in het materiaal dat Hans gemaakt heeft, verweven zijn met de wiskunde. Het koste Hans ongeveer 45 uur om het materiaal te maken en totaal werd er ongeveer 7 lesuren mee gewerkt. Een groot voordeel van deze manier van werken vond Hans, dat hij gemakkelijker kon overzien wat leerlingen aan het doen waren en directer kon reageren op wat ze deden dan wanneer ze in hun schrift werkten. Bovendien sloegen leerlingen hun uitwerkingen steeds op in een daarvoor gereserveerde plek op de server. Hans kon dus op elk gewenst moment het werk van leerlingen raadplegen en reageren op het werk van leerlingen.

5

StudyWorks - [int3.mcd]

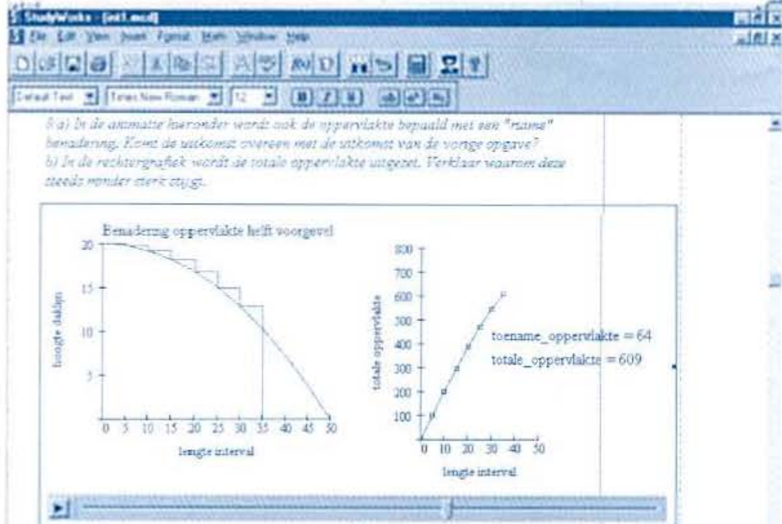
Het verschil tussen instroom en uitstroom wordt weergegeven door de volgende functie:

$$\text{stroom}(t) = -0.0518\,t^4 + 2.929\,t^3 - 52.99\,t^2 + 307.6\,t - 57.5$$

Na 24 uur is de hoeveelheid water gelijk aan

$$9240 + \int_0^{24} \text{stroom}(t)\,dt = 1.272 \cdot 10^4 \quad m^3$$

6



7

StudyWorks - [HSdeel4.mcd]

Opgave 6.

De formule is: $y = x^2 - 4$
Hierbij hoort het SCHEMA x --> [kw > ... [-4 > y

a. Neem x = 10 en bereken hier rechts de uitvoer y.

b. Neem de tabel over (dus bereken voor elke x die er staat de y) en vul deze dan in:

invoer x	-3	-2	-1	0	1	2	3
uitvoer y							

c. Teken hieronder de grafiek en neem deze over op een roosterblaadje

GRAFIEK VAN y = x² - 4

Conclusies

Het blijkt goed mogelijk te zijn om op deze wijze te experimenteren met computeralgebra en digitaal lesmateriaal. Als de proef beperkt blijft tot het vervangen van één of twee hoofdstukken uit het leerboek, is het mogelijk weer terug te vallen op dat leerboek als het experiment vastloopt. Behalve in het ene geval waarin het experiment werd afgeblazen, konden de leerlingen goed uit de voeten met het digitale materiaal. Het is nog een open vraag wat voor dit materiaal de meest geschikte vorm is: het stap voor stap doorwerken was zeer succesvol, maar voor het overzicht werd er gezocht naar een andere structuur of werd de digitale versie met een papieren versie aangevuld. Zowel leerlingen als docenten plaatsten kanttekeningen bij de diepgang waarmee de stof verwerkt wordt. Die wordt niet vanzelf bereikt door trouw alle opdrachten uit te voeren. Op dit punt is er geen verschil met een gewoon leerboek: ook bij dit materiaal moet de docent besprekingen organiseren die leerlingen stimuleren om meer diepgang te bereiken. Wel hadden enkele docenten de indruk dat leerlingen met dit materiaal beter de essentie van differentiëren en integreren door hadden. Dat zou kunnen komen doordat met dit materiaal veel minder aandacht besteed wordt aan het met de hand vinden van afgeleiden en primitieven en daarom wellicht meer aandacht besteed kon worden aan de betekenis van differentiëren en integreren. Het experiment in Veenendaal waar hetzelfde materiaal en dezelfde manier van organisatie totaal verschillend uitpakte in twee parallelklassen, laat echter zien dat het vrijwel onmogelijk is om een rechtstreeks verband te leggen tussen het gebruikte materiaal en het leereffect bij leerlingen. Binnen het project beperken we ons tot de vraag hoe je de lessen met dit materiaal zo kunt organiseren dat zowel leerlingen als docent de indruk hebben dat er effectief geleerd wordt.

Een bijzonder aspect bij het werken met dit materiaal is, dat digitale uitwerkingen, veel gemakkelijker dan schriftelijke uitwerkingen, voor anderen toegankelijk gemaakt kunnen worden. Leerlingen kunnen heel eenvoudig anderen een exemplaar van hun werk geven en er zelf ook één houden. Op verschillende scholen is van deze mogelijkheid gebruikt gemaakt bij de begeleiding van leerlingen. Op de J.S.G Maimonides gebruikte de docent uitwerkingen van leerlingen om een klassikale bespreking voor te bereiden. De tijdsinvestering voor de leraar bleef hierbij binnen de perken omdat de uitwerkingen van slechts enkele leerlingen al stof genoeg opleverden. Bij de klassieke manier van huiswerk bespreken is er eerst onvermijdelijk een fase waarin de docent geïnformeerd moeten worden over de manier waarop het huiswerk gemaakt is. Voor een leerling die een probleem niet heeft kunnen oplossen, is het moeilijk zo niet onmogelijk om precies aan te geven waarom het niet lukte. Het gevolg is vaak een moeizaam gesprek waarbij de aandacht van medeleerlingen moeilijk is vast te houden. Door van te voren het werk van leerlingen te bekijken kan deze moeizame fase van de huiswerkbespreking overgeslagen worden. Op het Jeanne d'Arc College gebruikte de docent de uitwerkingen van leerlingen bij de persoonlijke begeleiding van leerlingen. Beide manieren lijken heel effectief. Leerlingen kunnen het gevoel hebben dat er direct gereageerd wordt op wat zij bedacht hebben. Als in de toekomst elke leerling een e-mailadres heeft zullen de communicatieve mogelijkheden nog toenemen.

Vervolg

Het eerste cursusjaar dat het project gedraaid heeft, was bedoeld als oriënterend jaar. De deelnemers hebben naar eigen inzicht het experiment in de klas ingericht. Aan het eind van het cursusjaar hadden we een leerzame bijeenkomst waarin de ervaringen werden uitgewisseld en conclusies werden getrokken over de manier waarop in het volgend cursusjaar met het digitale lesmateriaal gewerkt zou worden. Het gaat erom dat docenten en leerlingen de lessen waarderen als effectief en leerzaam. We hopen aan het eind van het tweede projectjaar beschreven te hebben hoe die lessen te organiseren zijn, hoe je ze kunt toetsen en hoe de vaardigheden die leerlingen opdoen in te zetten zijn bij het opzetten en uitvoeren van een eigen onderzoek. Op wat langere termijn willen we antwoord kunnen geven op de vraag onder welke voorwaarden je effectief les kunt geven met behulp van een digitale leeromgeving.

De volgende docenten nemen op dit moment deel aan het project:
Ab van der Roest, Roel Veerbeek, Ichthus College, Veenendaal
Cor Steffens, Frits Spijkers, R.S.G Wiringherlant, Wieringerwerf
Hans Dompeling, Murmellius Gymnasium, Alkmaar
Hans van den Elsen, Jeanne d'Arc College, Maastricht
Harry Sitters, Benno Breeuwer, Montessori Lyceum, Amsterdam
Harry Smits, Willem Hoekstra, JSG Maimonides, Amsterdam
Klaas Wynia, R.S.G. Ter Apel
Wolfgang Reuter, Ed de Boer, Schoter S.G., Haarlem

Nadere informatie over het project kan verkregen worden bij APS-wiskunde, telefoon 030 2856805,
e-mail: wiskunde@aps.nl
APS-wiskunde heeft een kring geopend op Kennisnet. Hier is recente informatie over het project Digitale Leeromgeving Wiskunde te vinden; zie http://www.kennisnet.nl
Voor meer informatie over Studyworks zie http://www.mathsoft.com

DE ONTWIKKELING VAN HET ALGEBRA-ONDERWIJS [1]

door

Dr. W. J. Bos
Wassenaar

I *Motivatie*

Wij moeten naar mijn mening bij het algebra-onderwijs veel meer aandacht besteden aan de *motivatie* van de leerlingen. Laat ik eerst enkele voorbeelden geven:

1) Na het herleiden van produkten (en de merkwaardige produkten) kan men het ontbinden in factoren aan de orde stellen. Dat is gewoon het omgekeerde. *Wat* er gebeurt, is voor de leerlingen begrijpelijk, maar *waarom* gebeurt dit? Waarom gaat men na al maar haakjes wegmaken nu ineens juist „haakjes maken". Het lijkt mij beter de ontbindingen direct in verband te brengen met het vereenvoudigen van breuken. Dan heeft dit ontbinden direct een functie, dan is het *zinvol*.

2) Men kan definiëren wat een vergelijking is en het oplossen van vergelijkingen behandelen. Ik geloof dat dit zo kan dat de leerlingen goed begrijpen wat er gebeurt. Maar *waarom* vergelijkingen? Welke functie hebben ze? Het lijkt mij meer zinvol om b.v. te beginnen met getalraadsels, die zonder algebra opgelost kunnen worden, om dan geleidelijk te komen tot raadsels waarbij wel algebra nodig is, en zodoende tot vergelijkingen. Vergelijkingen dienen om problemen op te lossen.

3) Het begrip relative fout. Men kan de rel. fout definiëren en de eigenschap van de rel. fout in een produkt bewijzen en vervolgens toepassen. Dit kan begrepen worden en het begrip rel. fout krijgt daarmee reeds een duidelijke zin. Maar waarom kan men bij een produkt niet, zoals bij een som of verschil, volstaan met absolute fouten (wat trouwens natuurlijk mogelijk is)? Het lijkt mij daarom beter te beginnen met het schatten van produkten. Bij het schatten van b.v. $80030 \times 1{,}013$ mogen we wel de 30 maar niet de 0,003 verwaarlozen. Als de leerlingen dit inzien, dan hebben we een goede motivatie van het begrip rel. fout.

[1]) Voordracht op de W.V.O.-conferentie van 12 nov. 1960 te Amersfoort.

[221]

222

Bij deze voorbeelden is het zo dat de leerling niet slechts „begrijpt" („Ja, dat is zo, de redenering is juist, de regel snap ik"), maar dat bovendien de leerstof voor hem zinvol wordt, zinvol binnen zijn verworven ervaring. Nu ligt het niet op mijn weg lang stil te staan bij de vele probelemen die de motivatie ongetwijfeld oproept. Misschien echter kunnen wij het erover eens zijn dat *een noodzakelijke voorwaarde voor een goede motivatie is dat de leerlingen de zin van de begrippen en problemen duidelijk wordt.* Dit houdt in dat enthousiast-bezig-zijn nog geen bewijs is voor een goede motivatie. Juist in de lagere klassen hebben de leerlingen veel plezier in het maken van reeksen eenvoudige opgaven. Daar is niet veel op tegen, maar men zal zich daarbij dan toch steeds moeten afvragen of deze activiteit voldoende gericht is *op het leerobject zelf* en op het invoegen van de stof in een groter geheel. Zeer vaak blijkt immers korte tijd later dat dergelijk routinewerk, dat „zo goed ging", toch niet het eigendom van de leerlingen is geworden. Maar zelfs als ook de *zin* van de stof duidelijk is geworden, blijft het nog de vraag of de motiverende krachten zo groot zijn dat de leerling geboeid raakt, zich werkelijk richt op het vak, na gericht-te-zijn op het vak. Dit zal van vele andere factoren afhangen: individuele en sociale en niet in de laatste plaats van de persoon van de docent!

Men kan van mening verschillen over de vraag of de motivatie alleen door de docent of ook door het leerboek gegeven moet worden. In ieder geval zal men aan het leerboek de eis moeten stellen dat het een goede motivatie niet belemmert (b.v. door direct een formeel-wiskundige behandeling te geven).

Het doen ervaren van de zin kan gebeuren:

a) *Expliciet*, met behulp van argumenten (b.v.: om de aftrekking altijd mogelijk te maken voeren we negatieve getallen in.)

b) *Impliciet*, doordat de voorgelegde problemen zelf aan het onderwerp een zin geven (b.v.: via getalraadsels tot vergelijkingen).

De argumenten kunnen van verschillende aard zijn:

1) zuiver *wiskundige* overwegingen (om de aftrekking ...)

2) ze kunnen ontleend zijn aan het *rekenen* (om iets eenvoudiger te kunnen uitrekenen), aan het *dagelijks leven* of de *natuurkunde* (negatieve temperatuur als argument voor de invoering van negatieve getallen).

Het zal duidelijk zijn dat speciaal bij het begin van de algebra een goede motivatie van belang is. Wat is algebra? Wat wordt ermee beoogd? Wat betekenen die letters? Ik vraag mij af of het algebra-onderwijs juist op dit punt geen grote gebreken vertoont. Men begint vaak (op blz. 1) te vertellen dat we in de algebra met letters

223

werken die getallen voorstellen (soms zonder argument), om dan (op blz. 2) te vragen: „Bereken $a + b$, als $a = 2$ en $b = 3$". Waarom dan letters, waarom dan niet gewoon: bereken $2 + 3$? Welke zin heeft het substitueren van getallen op deze wijze?

Ook vindt men vaak al heel in het begin het volgende soort opgaven: „Iemand koopt a kg koffie voor p gulden per kg. Hoeveel moet hij betalen?" Welk probleem wordt hier eigenlijk gesteld? Wordt hierdoor de algebra op zinvolle wijze gekoppeld aan ervaringen uit het dagelijks leven? Enigszins anders ligt het als men begint met formules zoals $W = V - I$ (voor de winst) en $O = lb$ (voor de oppervlakte van een rechthoek), enz. Men moet daarbij echter wel bedenken dat de leerlingen hierbij nog niets over de zin van algebra leren, want dit zijn niets anders dan afkortingen van hun reeds lang bekende relaties waarbij geen algebra nodig is.

Geheel anders wordt het als men nieuwe formules voorlegt en de leerlingen zin en inhoud daarvan doet inzien. Zo beleef ik elk jaar weer veel genoegen van de formule voor de draagkracht van een hijsbalk:

$$G = 80\,\frac{bh^2}{l}$$

Door substituties kunnen de leerlingen gaan inzien dat deze formule praktische betekenis heeft en overeenstemt met hun ervaringen (over het breken van latjes). Niet alleen het werken met letters wordt op deze wijze zinvol, maar ook het substitueren in formules en daarmee ook het substitueren in vormen, die immers steeds opgevat kunnen worden als rechterlid van één of andere formule (waarbij we ons dus losmaken van de betekenis van de verschillende letters). De vraag: door welke andere vormen kan men een bepaalde vorm vervangen (eventueel om hem gemakkelijker te kunnen uitrekenen), voert op zinvolle wijze tot de identiteiten.

Ik heb hier zeer kort aangegeven hoe naar mijn mening een goede motivatie van het begin van de algebra verkregen kan worden door uit te gaan van de formules. Nu ben ik bepaald niet van mening dat dit de enige manier zou zijn om een goede motivatie te krijgen. Het is b.v. ook mogelijk uit te gaan van het gewone rekenen en de letters zinvol te laten gebruiken om eigenschappen algemeen te formuleren. Maar wèl komt het mij voor dat *wiskundige* argumenten in het begin geen motiverende kracht kunnen hebben, eenvoudig omdat „wiskunde" dan nog onbekend is! „Om elke aftrekking mogelijk te maken voeren wij negatieve getallen in." Maar waarom zouden we? Dit zijn beweringen die wel begrepen worden, maar niet als *argument* beleefd worden. „Om elke deling uitvoerbaar te maken voeren we breuken in". Hé, denkt een leerling, was dat dan de reden waarom

224

we vroeger op de lagere school breuken leerden? Ik dacht: omdat er nu eenmaal breuken „zijn"!!

Op den duur zal de waarde van de wiskundige argumenten groter worden en zal de zin van de begrippen duidelijk moeten worden uit de wiskundige samenhang. Impliciete motivatie zal ook dan naar mijn mening een veel grotere rol moeten spelen dan meestal het geval is.

II *Het getalbegrip*

Welke plaats moet het getalbegrip in ons onderwijs innemen? Uit het voorgaande zal duidelijk zijn dat ik het onnatuurlijk vind om met natuurlijke getallen te beginnen, dat ik bij de invoering van de negatieve getallen de aanleidingen hiertoe uit het dagelijks leven van groot belang acht, dat ik een formele invoering van de breuken als getallenparen niet voorsta, dat ik de invoering van reële getallen en wortels met behulp van getalrijen niet kan bewonderen. Ik wil er echter niet veel over zeggen, omdat ik er geen ervaring mee heb. Als ik de boeken zie waarin de formele weg bewandeld wordt, dan krijg ik ernstige minderwaardigheidsgevoelens, omdat ik weet dat ik niet in staat zou zijn mijn leerlingen te laten begrijpen wat daar gebeurt.

Natuurlijk kan men per definitie orderelaties tussen breuken vastleggen, maar ik vraag mij af of er geen snuggere leerling zou zijn die meent dat $\frac{6}{11} > \frac{5}{11}$ geen afspraak kan zijn, omdat hij meent dat hij dit kan „begrijpen".

De wiskundige opvatting dat getallen er eerst „zijn" nadat ze ingevoerd zijn, is naar mijn mening voor de algebra in de lagere klassen even onbruikbaar als axiomatiek voor de meetkunde. Nieuwe getallen worden „ontdekt"; de getallenrechte kan men naar links voortzetten, de zijde van een vierkant met een oppervlakte van 2 cm² „heeft" een bepaalde lengte. (Wel zou er in de bovenbouw tijd moeten zijn voor een grondige herhaling van het getalbegrip.)

Een ander punt houdt mij in dit verband bezig: lukt de invoering van de negatieve en irrationale getallen eigenlijk wel? Hebben de leerlingen de invoering wel meegemaakt? Ik bedoel dit: na een invoering vermelden de boeken: „Voortaan stellen de letters rationale, resp. reële getallen voor". Het leerboek gaat dan verder en slechts hier en daar worden bij coëfficiënten eens breuken, resp. wortels gebruikt. Is dit voldoende nazorg? Waar denken de leerlingen bij $a + 3b$ aan? Ook aan negatieve getallen, wortels, getalrijen? Of menen zij dat b.v. $+a$ positief is en $-a$ negatief?

Een belangrijk punt heb ik overgeslagen: hoe zijn de breuken op de lagere school verwerkt? Nu heb ik niet de illusie dat b.v. het delen

225

door een breuk goed begrepen is, maar ik vraag mij, eerlijk gezegd, wel eens af of het zo erg is als een enkele bewerking eigenlijk onbegrepen blijft, min of meer een kunstgreep blijft. Waarschijnlijk vervult U dit met afgrijzen en ik voel mijn geweten dan ook wel knagen. Maar . . . het feit dat de leerlingen van breuken niet veel begrepen hebben is een sterk argument *tegen* een formele behandeling, eventueel wel vóór een intuïtief-begripsmatige behandeling!

III *Functies*

In het begin van mijn inleiding heb ik uiteengezet waarom ik het formule-begrip belangrijk acht; het zal U dan ook niet verbazen dat ik het functie-begrip en de grafieken veel meer op de voorgrond zou willen plaatsen dan nu het geval is. Grafieken en functies horen naar mijn mening reeds in de eerste klas aan de orde te komen. De algebra moet gezien worden als een *leer der kwantitatieve relaties*. Dit acht ik gewenst terwille van een goede motivatie. Bovendien meen ik dat de leerlingen zo spoedig mogelijk de letters als *variabelen* moeten kunnen zien (zie het voorbeeld van de hijsbalk). Ik heb de indruk dat de grote nadruk die de vergelijkingen krijgen in de lagere klassen, vaak tot gevolg heeft dat de letters alleen als onbekenden (als vaste getallen) gezien worden, en dat daardoor grote moeilijkheden ontstaan bij het parameter-begrip, de ongelijkheden, het functie-begrip en de analytische meetkunde. Dat de identiteiten gelden voor alle getallen, of beter voor elk element van een verzameling, geeft voor een inzicht in het begrip variabele niet veel steun.

Aan een „statische" opvatting van het begrip variabele, als willekeurig element van een verzameling, zijn de leerlingen nog niet toe. Wij leven in de tijd, gebeurtenissen brengen andere gebeurtenissen met zich mee. Eerst veranderingen maken verbanden tussen de „dingen" zichtbaar. „Dynamische" termen als „toenemen" en „afnemen" kunnen aanvankelijk niet gemist worden. Voor de functie als *afbeelding* moeten de leerlingen rijp gemaakt worden.

Bij de vraag *hoe* de functies behandeld moeten worden, kan ik niet nalaten even stil te staan bij de bijzonder merkwaardige discussies en beschouwingen over de Y-as. [1]) Het is een soort kip-Y probleem. Een functie ontstaat door verschillende bewerkingen uit te voeren op de X, het is dus een soort X-en produkt, zoals een Y een kippeprodukt is. De wiskundige kippenfokker wenst het wiskundige kippeprodukt, de functie, niet te zien als zelfstandige grootheid, als Y, maar slechts als aanleiding voor nieuwe kippetjes (afgeleide functie, primitieve functie, enz.) Waarom? Dat zal ik trachten U duidelijk te maken. Ten eerste moet U dan weten dat in een andere branche,

[1]) Verg. Euclides 33, X. en 34, IV.

226

de analytische meetkunde, in dit verband vertegenwoordigd door firma's als Albert Heyn, kip of Y niets uitmaakt (het gaat om de winst). Verder is er dan ook nog de arme consument, dat is de man voor wie een Y een Y is. Deze consument, de fysicus, ziet wel degelijk het Y als kippeprodukt, maar ook als zelfstandige grootheid! De bekende kippenfokker Vredenduin zegt tegen consument natuurkunde: met jou heb ik niets te maken, als jij een Y een Y wil noemen dan moet je dat zelf maar uitzoeken.

Nu is de hele gang van zaken met de Y-as een duidelijk voorbeeld van dictatuur van een bedrijfschap. Ten eerste heeft het bedrijfschap, waartoe de kippenfokkers behoren, verordend dat *geen* kippeprodukt de naam Y mag dragen. Nu is het grappige dat de bedrijfschap geen zeggenschap heeft over A. H. die rustig zijn eieren blijft aanbevelen. Ten tweede poogt de bedrijfschap gedaan te krijgen dat de eieren (die dus geen Y mogen heten) niet aan A. H. geleverd mogen worden. Begrijpt U waarom? Dat zou verwarring kunnen geven. Volgens de wiskundige kippenfokkers mag de grafiek van de eerstegraads functie (dat krielei) niets te maken hebben met de rechte lijn in de analytische meetkunde! Tot zover het pluimveenieuws.

Wat de *behandeling* van de functies betreft, geloof ik dat er maar één mogelijkheid is. Het functie-begrip kan alleen begrepen worden als uitgegaan wordt van grootheden waartussen verband bestaat. Begonnen moet worden, liefst op de lagere school, met grafieken van empirische grootheden (temperatuur afhankelijk van de tijd, enz.) Daarna voorbeelden zoals het volgende: Van een rechthoekige plaat moet een goot gemaakt worden. De oppervlakte van de doorsnede hangt af van de hoogte van de rand. Uit de grafiek van dit verband is o.a. af te lezen hoe de goot gemaakt moet worden om zoveel mogelijk water af te kunnen voeren. Dan grafieken van andere formules (functionale verbanden). Steeds moet de achtergrond zijn: een grootheid p hangt af van een grootheid q en deze p en q hebben op zichzelf betekenis. Wèlke betekenis is voor de algebra zonder belang. Dit dus in de eerste klas. Pas later, daarin hebben de kippenfokkers gelijk, komen problemen waarbij de Y-as beter weggelaten kan worden (voor welke waarden van x is de functie . . .)

IV *Vaardigheid*

De stof van de lagere klassen moet met grote vaardigheid toegepast kunnen worden; de leerlingen moeten er mee vertrouwd zijn en er met vertrouwen mee werken; ze moeten de stof ter beschikking hebben. Wat die vaardigheid, van psychologisch standpunt, nu

227

precies betekent, wil ik buiten beschouwing laten. In ieder geval moet ze naar mijn mening niet neerkomen op een zuiver automatisme, evenmin echter op een steeds-weer-bewust-toepassen van regels. Ze moet voortkomen uit een vertrouwdheid die op inzicht gebaseerd is. Men zou kunnen zeggen: *ze moet met inzicht doorschoten zijn*. Het merkwaardige produkt $(A + B)(A - B)$ b.v. moeten de leerlingen blijven zien als de herleiding van een produkt van twee tweetermen waarbij de binnenste termen tegen elkaar wegvallen. Dat kan alleen als niet te snel op beheersing wordt aangestuurd!

Terwille van de selectie worden vaak complicaties behandeld die voor het verdere onderwijs geen betekenis hebben. Dit hangt, meen ik, nauw samen met de gewoonte om de verschillende onderwerpen direct in één hoofdstuk *geheel* te behandelen. Men stelt zich niet tevreden met een voorlopige oriëntatie op een bepaald gebied om er later, eventueel nog enige keren, in ander verband op terug te komen. Doet men dit laatste, dan zijn betrekkelijk eenvoudige opgaven, ook voor de selectie, veel beter geschikt. Ik zou in dit verband nog willen pleiten voor *hoofdalgebra*, waarbij veel beter gecontroleerd kan worden op welk niveau en met hoeveel begrip de vraagstukjes opgelost worden.

V *De toekomst*

Tot besluit zou ik mij willen wagen aan een voorspelling t.a.v. de toekomst van het algebra-onderwijs in de lagere klassen.

1) De algebra in de lagere klassen zal zich steeds meer ontwikkelen tot een leer der kwantitatieve relaties.

2) De begrippen formule, betrekking en functie zullen daarbij de centrale plaats innemen.

3) Voortdurend zal aandacht besteed worden aan een goede motivatie.

4) De formeel-wiskundige beschouwingen zullen niet direct aan de orde komen (ik denk hierbij niet alleen aan het getalbegrip, maar ook aan bijzonderheden als valse vergelijkingen, delen door nul, invoeren van wortels, enz.).

5) De vergelijkingen zullen meer op de achtergrond raken en de wortelvormen nog verder beperkt worden.

6) Er zal veel meer aandacht besteed worden aan de betekenis van de verkregen resultaten (b.v. wat betekent het als een letter niet meer voorkomt in een uitkomst?).

7) De leerling zal het gevoel krijgen een „instrument" ter beschikking te hebben, dat wel vaak weerbarstig is, maar waarmee hij toch vertrouwd is, en waarvan hij begrijpt hoe hij er kwantitatieve problemen mee tot een oplossing kan brengen.

W.J. Bos in Euclides 36 (1960-1961)



Bij sinterklaasvieringen met een klas komt ieder jaar weer het trekken van lootjes om de hoek kijken.
Alle leerlingen schrijven hun naam op een papiertje met hun verlangens en hun hobby's. De papiertjes gaan in een doos, worden geschud en ieder pakt er een papiertje uit.

aantal leerlingen	2	3	4	5	6	7
gunstige rangschikkingen	1	2	9	44	265	1854
totaal aantal rangschikkingen	2	6	24	120	720	5040
kans op een gunstige rangschikking	0,5	0,333	0,375	0,367	0,368	0,36786

[Hans Blom]

Sint en de letter e

Ieder jaar weer valt op dat minstens één keer opnieuw moet worden getrokken, omdat er minstens één leerling zijn of haar eigen papiertje trekt.
Als wiskundeleraar wil je dan wel eens weten hoe groot eigenlijk de kans is dat de trekking goed gaat, dus dat niemand zichzelf trekt.
Dan kun je natuurlijk de kanstheorie boeken uit je studententijd uit de kast halen, maar leuker is het om zelf eens wat te ontdekken.

Natuurlijk begin je dan met de kleinst mogelijke klas voor dit probleem, die van twee leerlingen.
Duidelijk is dat de kans dat het goed gaat 50% is.
Bij een klas met drie leerlingen wordt dit al wat meer telwerk. Het is dan handig de leerlingen te nummeren: 1, 2 en 3.
Het aantal rangschikkingen van de getallen 1, 2 en 3 is dan het mogelijk aantal verschillende trekkingen. Er zijn 6 rangschikkingen (vanaf de vierde klas weten we dat direct als $3! = 6$).
Iedere trekking (rangschikking) is even waarschijnlijk, dus alle hebben een kans van 1/6.
De vraag is (en dat is bij kansrekening altijd de vraag) hoeveel gunstige rangschikken van de getallen 1,2 en 3 er zijn, opdat niemand zichzelf trekt. Er mag dus in die rangschikking geen getal op dezelfde plaats komen.
Uitschrijven geeft als enige gunstige: 2 3 1 en 3 1 2.
Dus twee gunstige. De kans in een klas van drie wordt daarmee 2/6.
Bij een klas met vier leerlingen is het nog met de hand te doen. Er zijn $4! = 24$ rangschikkingen. Er zijn er 9 gunstig. De kans is dus 9/24.
Op deze manier achter de kansen komen wordt al snel te veel werk.
De computer is een ideaal hulpmiddel voor het tellen van gunstige rangschikkingen. Met behulp van de computer maak ik dus een tabel (*zie linker pagina*).

De regelmaat in de noemer is bekend. Als n het aantal leerlingen is dan is dat gewoon $n!$.
De regelmaat in de teller is lastiger. Na wat denkwerk valt mij op dat $265 = 6 \times 44 + 1$ terwijl $44 = 5 \times 9 - 1$.
En $1854 = 7 \times 265 - 1$.
De regelmaat is ontdekt. De tabel is dan ook met de hand eenvoudig verder af te maken.
De kans op een gunstige trekking convergeert snel naar het getal 0,367 879 439 2. Dit getal blijkt het omgekeerde van het beroemde getal e te zijn!
Voor mij op dat moment een verrassend resultaat. De kans op een gunstige trekking van lootjes in een klas is in goede benadering altijd 1/e.
De verwachtingswaarde van het aantal trekkingen dat nodig is in een klas, waarbij iedereen het briefje van iemand anders heeft, is gemakkelijk uit te rekenen en blijkt gelijk te zijn aan e.

Zo komt de letter 'e' wel heel verrassend uit de doos van sinterklaas. Je moet ongeveer e keer lootjes trekken.

Omdat dit getal voor mij een verrassing was, heb ik toch maar eens de intussen al weer vijfentwintig jaar oude studieboeken over kansrekening uit de kast gehaald.
Natuurlijk wordt daarin een soortgelijk probleem behandeld. Het getal e komt daar heel natuurlijk in naar voren. De binomiale verdeling gaat bij grote waarden van n over in de Poisson-verdeling waarin een e-macht voorkomt.
De reeks kansen bij toenemende n (aantal leerlingen) blijkt ook een veel eenvoudiger regelmaat te hebben:

Zo is bij $n = 7$ deze kans gelijk aan

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}$$

En natuurlijk geeft de optelling van de oneindige reeks 1/e, op grond van de definitie van het getal e via:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Ooit kennelijk wel geleerd, maar na zoveel jaren van lesgeven wel weer wat weggezakt.
Zo zie je maar weer waar een sinterklaasviering met de klas toe kan leiden.

Over de schrijver
Hans Blom is leraar wiskunde aan het Fioretticollege in Lisse.

Een jaar nadat vanuit kringen van historici werd gewezen op de 'millenniumvergissing' - uiteraard waren zij als roependen in de woestijn - komen nu ook wiskundigen met deze kreet (zie het artikel van Jan Zuidhoek in Euclides 76-3, p. 124-125). En dat, evenals bij de historici, slechts op basis van de onbekendheid met 'de nul' ten tijde van de instelling van onze jaartelling, een en ander geïllustreerd met de getallenrechte.

[Eveline Tuynman]

Millennium-vergissing?

Dat historici daarbij geheel voorbijgaan aan het verschil tussen de nul als getal, de nul als symbool voor het ontbreken van eenheden van een zekere macht van het grondtal in een positionele getalnotatie en het gebruik van de nul als beginpunt voor een schaalverdeling of telling vind ik nog begrijpelijk. Van een wiskundige verwacht ik dit niet.
En dan de slotzin, citaat: '[...] doordat zijn kilometerteller startte bij 000, maar onze jaartelling op 1-1-1.' Omdat Dionysius Exiguus onbekend was met het getal 0, geeft hij Jezus bij zijn geboorte al de leeftijd van 1 jaar. Dat wil er bij mij niet in.

Voor *alle tellen*, of het nu gaat om materiële of immateriële zaken, geldt dat er een beginpunt is en dat je pas 1 telt als er iets substantieels aanwezig is: bij knikkers is dat 1 knikker bij de tijdtelling 1 tijdseenheid. Je begint met niets, of dat nu wel of niet door een symbool wordt aangegeven doet niet ter zake.

Bij de jaartelling is dat niet anders: de Romeinen telden vanaf de stichting van de stad Rome (Ab Urbe Condita, AUC), onze jaartelling begint bij de geboorte van Jezus, een persoon en daarbij geldt zeker dat het jaar 1 pas begint na afloop van het eerste levensjaar. Het is moeilijk voor te stellen dat de leeftijd van Jezus niet

correspondeert met het jaartal. Daarbij wordt in het eerste (rangtelwoord) levensjaar, dat je in onze huidige terminologie het jaar 0 (hoofdtelwoord) zou kunnen noemen al is dit niet gebruikelijk, de leeftijd gemeten in kleinere eenheden zoals weken en maanden. Ik neem aan dat Dionysius Exiguus voor dit eerste jaar het symbool 'Annus Domini' hanteerde en ik interpreteer de uitdrukking 'Anno Domini' (A.D.) als *vanaf* het jaar des Heren, naar analogie met AUC, en niet als *in* het jaar des Heren, de vertaling die van Dalen geeft. Deze heb ik altijd vreemd gevonden, en nooit kunnen begrijpen.

Alleen met de originele tekst van Dionysius Exiguus zelf of een andere uit het midden van het eerste millennium A.D., waarin de Romeinse en Christelijke jaartelling naast elkaar zijn aangegeven, kunt u mij overtuigen van de juistheid van uw standpunt. Ik houd het erop dat de jaartelling niet alleen parallel loopt met de leeftijdtelling van de mens, van levende wezens in het algemeen, maar met *alle* tellen. En ik voel me gesteund door die 'domme' (karakterisering door mij) middeleeuwers, (citaat) 'die zich niet realiseerden dat er op 1-1-1000 pas 999 jaren van het eerste millennium waren verstreken.' Dat was tenslotte krap 5 eeuwen na het invoeren van de nieuwe jaartelling en een periode waarin de rekenkunst in Europa geen noemenswaardige ontwikkeling doormaakte. Het argument 'men kende toen de nul niet' verwerp ik als niet steekhoudend. De Babyloniërs bijvoorbeeld hebben zelfs gedurende vele eeuwen met een positionele getalnotatie gerekend zonder enig symbool, met een open plek om aan te geven dat er geen eenheden op die plaats voorkomen, voordat daarvoor een apart symbool werd ingevoerd (Ifrah).

Mag ik tot slot mijn collega's, schrijver van het artikel en de redacteuren van Euclides, het prachtige boek van George Ifrah 'De wereld van het getal' aanbevelen? Lezing ervan bevordert een respectvolle benadering van eeuwenoud tel- en rekenwerk en bescheidenheid bij de interpretatie van hun resultaten vanuit een modern standpunt.

Reactie van Jan Zuidhoek

Dat reeds eerder historici gewezen hebben op de millenniumvergissing was me niet bekend, maar doet me genoegen. Jammer dat desondanks juist historici ook bijgedragen hebben tot het grote misverstand.
Voor het overige beperk ik me tot commentaar op die opmerkingen van Eveline Tuynman die mijns inziens èn relevant èn onjuist zijn.
Om te beginnen verschillen Eveline en ik van mening over de nummering van de jaren. Bij haar is het jaar 1 het *tweede* jaar. Ik denk dat Dionysius Exiguus met het jaar 1 gewoon het *eerste* jaar van *zijn* jaartelling bedoelde. Het tellen van jaren gaat mijns inziens niet anders dan (bijvoorbeeld) het tellen van koningen (koning Willem I was toch de *eerste* Nederlandse koning met de naam Willem?).
Volgens Eveline zouden de argumentatie van de historici en mijn redenering slechts gebaseerd zijn op het feit dat Dionysius Exiguus het getal 0 niet kende.
Wat de historici betreft: waar het om gaat is *dat* zij het bestaan van een jaar nul niet erkennen (met alle consequenties van dien!), zelfs al zou hun argumentatie misschien niet steekhoudend zijn. En wat mij betreft: ik heb het feit dat Dionysius Exiguus het getal 0 niet kende, uiteraard wel vermeld, echter nergens gebruikt als argument in mijn redenering, en aangetoond dat men (desondanks) tot een puike jaartelling kwam. Dionysius Exiguus en zijn navolgers treft geen blaam. Integendeel! Als u en ik *nu* (nu we het getal 0 wel kennen) een nieuwe jaartelling zouden moeten instellen in opdracht van een of andere autoriteit, dan zou die nieuwe jaartelling er precies zo uitzien als onze huidige westerse jaartelling; ook wij zouden het eerste millennium *na* tijdstip 0 en het eerste millennium *voor* tijdstip 0 gewoon aan elkaar plakken. En hetzelfde met eeuw, het decennium en het jaar. Hieruit volgt dat het jaar -1 direct overgaat in het jaar 1. Er is dus helemaal geen plaats voor een jaar nul.
Het wil er bij mijn opponente niet in dat Jezus bij zijn geboorte al de leeftijd van 1 jaar zou hebben gehad. Er is echter niemand die haar deze conclusie zou willen opdringen, en ik al helemaal niet. De datum 1-1-1 betekent niets anders dan de eerste dag van de eerste maand van het jaar 1. Deze datum werd geacht de geboortedatum van Jezus te zijn (dat D.E. er met deze datum zo een jaar of vier naast zat, is jammer, maar niet relevant). Volgens Eveline begint het jaar 1 *zeker na* afloop van het eerste levensjaar van Jezus. In de visie van D.E. begon direct na het eerste levensjaar van Jezus het jaar 2.
Ten slotte. De door Eveline Tuynman zo dringend gewenste originele tekst kan, vrees ik, niemand haar verstrekken. Wat we nog wel kunnen doen, is het verband tussen de Romeinse en onze westerse jaartelling door onze leerlingen te laten reconstrueren. Stel, dat Rome op 1-3-753 werd gesticht (de historici beschikken wellicht over een betere stichtingsdatum). Dan volgt hieruit, en iedereen kan dit controleren met behulp van de beide getallenrechten, dat onze westerse datum 1-1-1 ongeveer overeenkomt met de romeinse datum 1-11-753.

Bijschrift van de redactie

Met deze bijdragen over het begin van een nieuw millennium moeten we de discussie hierover in Euclides beëindigen. In talloze kranten en tijdschriften hebben 2000-ers en 2001-ers hun degens inmiddels afdoende gekruist.
Zo wees Hessel Pot ons nog op twee publicaties.
Eén uit 1799: Voorstelling dat het jaar 1800 (en niet 1801) het begin der negentiende eeuw is of moet zijn, door Jan Cantzlaar (18 pagina's).
En één uit 1800: Geschied- en Wiskundige Verhandeling over het verschil wegens het slotjaar der XVIII. eeuw, strekkende tot wederlegging van hen, die het afgelopen jaar 1799 daar voor houden, door Jacob de Gelder (118 pagina's!!).

De redactie stelt voor de discussie in 2099 (en/of in 2999) weer op te pakken.

Service pagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankeljke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk door geven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het lopende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: *redactie-euclides@nvvw.nl*

nr	verschijnt	deadline
6	31 maart 2001	15 februari 2001
7	16 mei 2001	29 maart 2001
8	27 juni 2001	10 mei 2001

do. 8 en vr. 9 maart 2001
Masterclass Statistiek
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

vrijdag 23 maart 2001 (gewijzigde datum)
Kangoeroe 2001

do. 19 en vr. 20 april 2001
37e Nederlands Mathematisch Congres
Vrije Universiteit, Amsterdam

zaterdag 21 april 2001
Reünie wiskundigen KU Nijmegen

donderdag 26 april 2001
Nationale conferentie ICT in het wiskundeonderwijs
Organisatie APS en Freudenthal Instituut
Zie ook p. 203 in dit nummer.

woensdag 16 mei 2001
Examens vwo B (os), vwo B1 en vwo B12 (ns)
maandag 21 mei 2001
Examens mavo/vbo C/D
woensdag 23 mei 2001
Examens havo A (os), havo A12 (ns)
woensdag 30 mei 2001
Examens havo B (os), havo B1 en havo B12 (ns)
donderdag 31 mei 2001
Examens vwo A (os), vwo A1 en vwo A12 (ns)
(os=oude stijl; ns=nieuwe stijl)

woensdag 20 juni
Examens 2e tijdvak

zaterdag 26 mei 2001
Symposium Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO)
Hogeschool Domstad, Utrecht
Zie p. 177 in Euclides 76-4.

Regionale ICT-Onderwijsdagen

14 maart 2001 Amsterdam, RAI
21 maart 2001 Groningen, Martinihal
28 maart 2001 Rotterdam, Erasmus Expo- en Congrescentrum
11 april 2001 Den Bosch, Brabanthallen
18 april 2001 Zwolle, IJsselhallen
25 april 2001 Utrecht, Jaarbeurs

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW: *http://www.nvvw.nl/Agenda2.html*



Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen

Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor *f* 400,-
Individueel abonnement voor leden: *f* 75,-
Losse boekjes voor leden: *f* 16,50
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10). Zelf ophalen kan in de losse verkoop; ledenprijs op bijeenkomsten *f* 12,50; in de betere boekhandel *f* 16,75.

* *Nomenclatuurrapport Tweedefase havo/vwo*

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie, zie colofon.

* *Wisforta - wiskunde, formules en tabellen*

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 900165956X; prijs f 15,00; te bestellen in de boekhandel.

Euclides is het orgaan van de NVvW voor leraren wiskunde van vmbo tot hbo.
Euclides verschijnt 8 keer per jaar.

Het bestuur van de Vereniging delegeert statutair de verantwoordelijkheid voor de inhoud van Euclides aan de hoofdredacteur.

De redactie bestaat uit vrijwilligers.
De kernredactie bestaat uit de hoofdredacteur, de eindredacteur en de voorzitter van de redactie.
De hoofdredacteur ontvangt een jaarlijkse vergoeding van f 10.000,–, welke eventueel kan worden vervangen door detachering.
Een indicatie voor de benodigde tijd is gemiddeld een dagdeel per week, met pieken rond de deadline van de nummers.

De vacature voor hoofdredacteur ontstaat in principe per 1 april 2001.
Deze datum is flexibel: eerder of later is mogelijk, in overleg met het bestuur en de huidige hoofdredacteur.
Altijd zal sprake zijn van een ruime inwerkperiode.

Gezocht wordt

iemand die zoveel mogelijk voldoet aan het volgende profiel:

- ✓ op de hoogte van recente ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs: vmbo, Tweede Fase en ICT;
- ✓ in staat ontwikkelingen kritisch te volgen;
- ✓ in staat auteurs te stimuleren artikelen te schrijven voor Euclides;
- ✓ in staat een beoordeling van een artikel te formuleren na raadpleging van mederedacteuren en daarover te corresponderen met auteurs van artikelen;
- ✓ in staat planmatig te werken en zich te houden aan deadlines;
- ✓ bereid het beleid van Euclides vorm te geven in samenspraak met kernredactie, redactie en bestuur van de vereniging;
- ✓ in staat redactionele bijdragen te leveren;
- ✓ beschikkend over leidinggevende en contactuele eigenschappen.

Hoofdredacteur
van Euclides



Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Belangstellenden kunnen, tot 15 maart 2001, contact opnemen met de voorzitter van de redactie:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal, tel.: 0318 542243
e-mail: *g.de.kleuver@freeler.nl*

Informatie over de werkzaamheden van de hoofdredacteur kan verkregen worden bij de huidige hoofdredacteur:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24, 3731 GH De Bilt, tel.: 030 2210514
e-mail: *redactie-euclides@nvvw.nl*

Toegestaan op Tweede Fase eindexamens havo-vwo

Wisforta

Wiskunde, Formules en Tabellen

Eindelijk duidelijkheid! Alles wat een leerling mag raadplegen op zijn Tweede Fase wiskunde-examen in een overzichtelijk boekje.



De inhoud:

- *formulekaart havo*
- *formulekaart vwo*
- *cumulatieve binomiale verdeling*
- *cumulatieve normale verdeling*
- *toevalsgetallen.*

Het boekje is goedgekeurd door de CEVO en mag bij de centrale examens wiskunde in de Tweede Fase worden gebruikt.

(Bron: www.eindexamen.nl en de novemberbrief 1999)

ISBN 90 01 65956 X *f* 15,00 € 6,81

Het boek is alleen voor rekening leverbaar. Stuur de bon in een gefrankeerde envelop naar Wolters-Noordhoff, t.a.v. afd. voorlichting Exact, Postbus 58, 9700 MB Groningen. E-mailen kan ook: voorlichting.vo.exact@wolters.nl.

Bestelcoupon

Ja, ik bestel

___ ex *Wisforta* à *f* 15,00/€ 6,81 ISBN 90 01 65956 X

Naam school ______________________

Ter attentie van ______________________

Adres ______________________

Postcode ______________________

Plaats ______________________

419/1594



Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11
Fax (050) 522 62 55

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters Noordhoff